LUCIAN BĂDESCU

SUPRAFEȚE ALGEBRICE

EDITURA ACADEMIEI
REPUBLICII SOCIALISTE ROMÂNIA

LUCIAN BĂDESCU

Suprafeţe ALGEBRICE

EDITURA ACADEMIEI REPUBLICII SOCIALISTE ROMÂNIA
BUCUREŞTI, 1981

PREFAȚĂ

Cartea de față are drept scop prezentarea unor fapte fundamentale din teoria suprafețelor algebrice, definite peste un corp k algebric închis de caracteristică arbitrară. Ea se bazează pe un șir de expuneri ținute de autor în cadrul unui seminar de geometrie algebrică organizat la Facultatea de matematică a Universității din București.

Se urmărește în principal clasificarea suprafețelor proiective și nesingulare (care mai sînt numite și simplu — suprafețe). În cazul varietăților algebrice complexe, această clasificare a fost făcută de către Enriques și Castelnuovo. În jurul anului 1960, Kodaira a reluat și simplificat clasificarea suprafețelor algebrice complexe și a extins-o și la cazul suprafețelor analitice compacte (cf. Kodaira [1] și [2]). Rămînea deschisă problema clasificării suprafețelor în caracteristică arbitrară. Primul progres în această direcție l-a constituit demonstrația pur algebrică (valabilă în orice caracteristică) dată de Zariski criteriului de raționalitate al lui Castelnuovo (cf. Zariski [2] și [3]). Apoi Mumford a introdus o serie de idei noi, astfel încît clasificarea suprafețelor a început să devină posibilă și în caracteristică arbitrară (cf. Mumford [3] și [4]) În fine, Bombieri și Mumford au desăvîrșit clasificarea suprafețelor în orice caracteristică (cf. Bombieri-Mumford [1] și [2]). Rezultatul obținut de ei a fost următorul: aceleași tipuri de suprafețe care apar în cazul cînd k este corpul complex, apar și în cazul general, dacă se lasă la o parte anumite patologii ce apar numai în caracteristică 2 și 3.

Este interesant de remarcat că noile idei și tehnici introduse de Bombieri și Mumford au simplificat și clarificat multe din argumentele clasice.

Scopul nostru principal este să prezentăm metodele introduse de Bombieri și Mumford privind clasificarea suprafețelor. Clasificarea propriu-zisă începe în § 7. A mai fost necesar să prezentăm și o serie de alte fapte de teoria suprafețelor (interesante

şi în sine) care nu ţin de clasificare, dar care intervin în aceasta. De exemplu : criteriul Nakai-Moishezon de amplitudine, teoria singularităţilor normale ale suprafeţelor (cu referire specială la singularităţile raţionale), raportul între dualitatea Grothendieck-Serre şi studiul singularităţilor etc.

De asemenea, odată cu clasificarea suprafeţelor se demonstrează şi un rezultat remarcabil al lui Zariski şi Mumford care afirmă că inelul canonic al unei suprafeţe este o k-algebră finit generată. În §12 se clasifică complet modelele minimale ale suprafeţelor riglate şi raţionale.

În partea finală a redactării materialului de faţă am luat cunoştinţă de o excelentă carte despre clasificarea suprafeţelor complexe a lui A. Beauville (cf. Beauville [1]), în care sînt prezentate cîteva din ideile originale ale lui Enriques şi Castelnuovo via lucrările lui Kodaira citate mai sus şi seminarul Safarevici (cf. Safarevici şi al. [1]).

Cartea se adresează cititorilor care posedă deja un bagaj de cunoştinţe în geometria algebrică cum ar fi : teoria curbelor algebrice, coomologia fasciculelor coerente, teoria schemei Picard şi Hilbert pentru suprafeţe, fapte generale despre varietăţi abeliene, elemente de topologie algebrică şi topologie etală (numere Betti, clase Chern etc.) şi teorema Riemann-Roch pentru suprafeţe (incluzînd formula lui Noether). Pornind de la aceste fapte, am căutat să prezint materialul într-o manieră unitară şi cu demonstraţii complete.

În încheiere ţin să mulţumesc lui N. Manolache pentru citirea atentă a manuscrisului şi observaţiile făcute.

AUTORUL

CUPRINS

CONVENȚII DE NOTAȚII

În cele ce urmează vom fixa un corp k algebric închis de caracteristică arbitrară. Vom folosi notațiile standard din EGA (Grothendieck-Dieudonné [1]). Prin varietate algebrică peste k vom înțelege o k-schemă algebrică integră.

Dacă X este o varietate algebrică completă și L un O_X-modul inversibil, vom nota prin $|L|$ mulțimea tuturor divizorilor Cartier efectivi D de pe X astfel încît $O_X(D) \cong L$. Această mulțime (numită sistemul linear asociat lui L) se identifică în mod natural cu spațiul proiectiv $P(H^0(L))$ asociat spațiului secțiunilor globale $H^0(L)$ ale lui L (cf. Mumford [1], lecția 10).

Presupunem acum X varietate completă și nesingulară. Atunci divizorii Cartier de pe X se identifică cu divizorii Weil de pe X. Vom nota prin $\mathrm{Div}(X)$ mulțimea tuturor divizorilor lui X. Dacă D_1 și $D_2 \in \mathrm{Div}(X)$, atunci prin notația $D_1 \sim D_2$ înțelegem că divizorul D_1 este linear echivalent cu divizorul D_2. Fie acum L_1 și L_2 două O_X-module inversibile. Atunci prin notația $L_1 \approx L_2$ (resp. $L_1 \approxeq L_2$) înțelegem că L_1 este algebric (resp. numeric) echivalent cu L_2 (cf. §5 pentru definițiile acestor noțiuni). Vom nota prin $\mathrm{Pic}(X)$ grupul lui Picard al lui X a tuturor claselor de izomorfism de O_X-module inversibile (cu operația indusă de produsul tensorial), și prin $\mathrm{Pic}^0(X)$ (resp. $\mathrm{Pic}^{\tau}(X)$) subgrupul lui $\mathrm{Pic}(X)$ format din toate clasele de izomorfism $L \in \mathrm{Pic}(X)$ astfel încît $L \approx O_X$ (resp. $L \approxeq O_X$). Vom pune atunci $NS(X) = \mathrm{Pic}(X)/\mathrm{Pic}^0(X)$ (grupul lui Néron-Severi al lui X) și $\mathrm{Num}(X) = \mathrm{Pic}(X)/\mathrm{Pic}^{\tau}(X)$.

Restul de notații și terminologie care nu sînt standard vor mai fi precizate și pe parcursul lucrării.

§ 1.

TEORIA COOMOLOGICĂ A INTERSECȚIEI ȘI CRITERIUL NAKAI-MOISHEZON DE AMPLITUDINE

În acest paragraf vom prezenta, după Kleiman [1], teoria coomologică a intersecției divizorilor precum și criteriul Nakai-Moishezon de amplitudine a unui divizor împreună cu consecințele sale mai importante. De asemenea vom demonstra că orice suprafață completă și nesingulară este proiectivă.

(1.1) Teoremă. (Snapper). *Fie F un O_V-modul coerent pe K-schema algebrică completă V (cu K un corp algebric închis de caracteristică arbitrară, fixat odată pentru totdeauna), și fie $L_1, \ldots, L_t$ $(t \geqslant 0)$ t O_V-module inversibile. Atunci funcția $f_F(n_1, \ldots, n_t) = \chi(F \otimes L_1^{n_1} \otimes \ldots \otimes L_t^{n_t})$ este un polinom numeric în $n_1 \ldots n_t$ de grad $\leqslant s = \dim(\mathrm{Supp}(F))$.*

(1.2) Fie $\mathbb{Q}[n_1, \ldots, n_t]$ inelul polinoamelor cu coeficienți raționali în variabilele $n_1, \ldots, n_t$. Este clar că polinoamele de forma $\binom{n_1+i_1}{i_1}, \ldots, \binom{n_t+i_t}{i_t}$, $i_k \geqslant 0$, formează o bază peste $\mathbb{Q}$ a lui $\mathbb{Q}[n_1, \ldots, n_t]$. Dacă $f \in \mathbb{Q}[n_1, \ldots, n_t]$, f se numește *polinom numeric* dacă pentru orice $(n_1, \ldots, n_t) \in \mathbb{Z}^t$, valoarea lui f în $(n_1, \ldots, n_t)$ este totdeauna un număr întreg. Dacă exprimăm pe f sub forma

$$f = \sum_{i_k \geqslant 0} a_{i_1, \ldots, i_t} \binom{n_1+i_1}{i_1} \ldots \binom{n_t+i_t}{i_1}, \quad a_{i_1, \ldots, i_t} \in \mathbb{Q},$$

atunci avem următorul criteriu simplu: f este polinom numeric dacă și numai dacă $a_{i_1, \ldots, i_t} \in \mathbb{Z}$ pentru orice $i_k \geqslant 0$.

Demonstrația teoremei (1.1). Vom proceda prin inducție după s, cazurile $s = -1$ (i.e. $F = 0$) și $s = 0$ fiind banale. Presupunem deci $s \geqslant 1$. Înlocuind pe V cu $\mathrm{Supp}(F)$ (cu structura de subschemă închisă dată de idealul anulator $\mathrm{Ann}(F) \subset O_V$), putem presupune $V = \mathrm{Supp}(F)$. Fie atunci $\mathscr{L}$ categoria tuturor O_V-modulelor coerente și fie $\mathscr{L}'$ subclasa lui $\mathscr{L}$ formată din acele fascicule ce satisfac concluzia teoremei. Folosind ipoteza de inducție și aditivitatea caracteristicii Euler-Poincaré, se observă imediat că dacă $0 \to F_1 \to F_2 \to F_3 \to 0$ este un șir exact în $\mathscr{L}$ astfel încît două din aceste fascicule sînt în $\mathscr{L}'$, atunci al treilea este de asemenea în $\mathscr{L}'$. Ca să dovedim egalitatea $\mathscr{L}' = \mathscr{L}$ folosim lema de dévissage (EGA III 3.1.2). În baza acestei leme este suficient să arătăm că *dacă* $X \subset V$ *este o subschemă închisă și integră a lui* V, *atunci* $O_X \in \mathscr{L}'$.

Această afirmație se demonstrează prin inducție după t, cazul $t = 0$ fiind banal. Deoarece X este o K-schemă algebrică integră există un divizor Cartier D pe X astfel încît $L_1 \cong O_X(D)$. Fie

$$J = O_X(-D) \cap O_X,\ I = J \cdot O_X(D) = J \otimes L_1 \subset O_X,$$
$$G = O_X/J \text{ și } H = (O_X/I) \otimes L_1^{-1}.$$

Atunci avem șirurile exacte:

$$0 \to J \otimes L_1^{n_1} \otimes \ldots \otimes L_t^{n_t} \to L_1^{n_1} \otimes \ldots \otimes L_t^{n_t} \to G \otimes L_1^{n_1} \otimes \ldots \otimes L_t^{n_t} \to 0$$
$$\|$$
$$0 \to I \otimes L_1^{n_1-1} \otimes L_2^{n_2} \otimes \ldots \otimes L_t^{n_t} \to L_1^{n_1-1} \otimes L_2^{n_2} \otimes \ldots \otimes L_t^{n_t} \to$$
$$\to H \otimes L_1^{n_1} \otimes \ldots \otimes L_t^{n_t} \to 0$$

de unde obținem egalitatea:

$$\chi(L_1^{n_1} \otimes \ldots \otimes L_t^{n_t}) - \chi(L_1^{n_1-1} \otimes L_2^{n_2} \otimes \ldots \otimes L_t^{n_t}) =$$
$$= \chi(H \otimes L_1^{n_1} \otimes \ldots \otimes L_t^{n_t}) - \chi(G \otimes L_1^{n_1} \otimes \ldots \otimes L_t^{n_t}).$$

Însă $\mathrm{Supp}(G)$ și $\mathrm{Supp}(H)$ sînt strict incluse în X, deci după ipoteza de inducție (după s), G și H aparțin lui $\mathscr{L}'$, de unde deducem că membrul doi al egalității de mai sus este un polinom numeric de grad $< s$. Deoarece după ipoteza inductivă (după t) funcția $\chi(L_2^{n_2} \otimes \ldots \otimes L_t^{n_t})$ este un polinom numeric de grad $\leqslant s$, afirmația de mai sus (și prin aceasta teorema (1.1)) rezultă. Q.E.D.

(1.3) *Observații.* a) Dacă V este o curbă algebrică completă și nesingulară și L este un fascicul inversibil pe V, atunci faptul că $\chi(L^n)$ este polinom numeric rezultă și din teorema Riemann-Roch, anume $\chi(L^n) = n \deg(L) + \chi(O_V)$.

b) Dacă V este o suprafață proiectivă și nesingulară și L_1, L_2 sînt două O_V-module inversibile, atunci din teorema Riemann-Roch pentru suprafețe deducem următoarea formă explicită a polinomului numeric $\chi(L_1^{n_1} \otimes L^{n_2})$:

$$\chi(L_1^{n_1} \otimes L_2^{n_2}) = 1/2\,[n_1^2 \cdot (L_1^{\cdot 2}) + 2\, n_1 n_2 \cdot (L_1 \cdot L_2) + n_2^2 \cdot (L_2^{\cdot 2})] -$$
$$- 1/2 \cdot [n_1(L_1 \cdot \omega_V) + n_2 (L_2 \cdot \omega_V)] + \chi(O_V),$$

unde $(\cdot)$ este indicele clasic de intersecție (cf. Mumford [1]), iar ω_V este fasciculul canonic pe V. În particular, indicele clasic de intersecție $(L_1 \cdot L_2)$ apare drept coeficientul lui $n_1 n_2$ în polinomul numeric $\chi(L_1^{n_1} \otimes L_2^{n_2})$ de grad 2.

Aceste observații sugerează următoarea definiție generală a indicelui de intersecție:

(1.4) Definiție. Fie $L_1, \ldots, L_t$ $(t \geqslant 0)$ t fascicule inversibile pe K-schema algebrică completă V, și fie F un O_V-modul coerent astfel încît $\dim \operatorname{Supp}(F) \leqslant t$. Se numește *indicele de intersecție* $(L_1 \ldots L_t \cdot F) = (L_1 \ldots L_t \cdot F)_V$ al lui $L_1, \ldots, L_t$ cu F, coeficientul monomului $n_1 n_2 \ldots n_t$ din polinomul numeric (de grad $\leqslant t$) $\chi(F \otimes L_1^{n_1} \otimes \ldots \otimes L_t^{n_t})$.

Din definiție și din (1.2) rezultă că $(L_1 \ldots L_t \cdot F)$ este totdeauna un număr întreg. În plus avem în mod evident:

(1.5) Lemă. $(L_1 \ldots L_t \cdot F) = 0$ *dacă* $\dim \operatorname{Supp}(F) < t$ *și* $(F) = \dim H^0(F)$ *dacă* $\dim \operatorname{Supp}(F) = t = 0$.

(1.6) Lemă. $(L_1 \ldots L_t \cdot F)$ *este o formă simetrică în* $L_1, \ldots, L_t$.

Demonstrație. Numai linearitatea nu este evidentă. Fie M și N două O_V-module inversibile. Avem de determinat $(M \otimes N^{-1} \cdot L_2 \ldots L_t \cdot F)$. Observăm că

$$\chi(F \otimes M^m \otimes N^{-n} \otimes L_2^{n_2} \otimes \ldots \otimes L_t^{n_t}) = (M \cdot L_2 \ldots L_t \cdot F) \cdot m n_2 \ldots n_t -$$
$$- (N \cdot L_2 \ldots L_t \cdot F) \cdot n n_2 \ldots n_t + \ldots,$$

luînd succesiv $m = 0$ și $n = 0$. Însă dacă $m = n = n_1$, avem

$$\chi(F \otimes (M \otimes N^{-1})^{n_1} \otimes L_2^{n_2} \otimes \ldots \otimes L_t^{n_t}) = [(M \cdot L_2 \ldots L_t \cdot F) -$$
$$- (N \cdot L_2 \ldots L_t \cdot F)] \cdot n_1 n_2 \ldots n_t + \ldots,$$

de unde rezultă linearitatea. Q.E.D.

(1.7) *Notație.* Dacă $L_1 = L_2 = \ldots = L_t = L$, vom mai scrie $(L^{\cdot t}\cdot F)$ în loc de $(L \ldots L \cdot F)$. Dacă $F = O_W$ cu W subschemă închisă în V, vom mai scrie $(L_1 \ldots L_t \cdot W)$ în loc de $(L_1 \ldots L_t \cdot O_W)$, iar dacă $W = V$, vom mai scrie $(L_1 \ldots L_t)$ în loc de $(L_1 \ldots L_t \cdot V)$. În particular, dacă $L_1 = \ldots = L_r = L$ şi $L_{r+1} = \ldots = L_t = L'$ şi $F = O_W$, vom scrie simplu $(L^{\cdot r}\cdot L'^{\cdot(t-r)}\cdot W)$ în loc de $(\underbrace{L \ldots L}_{r\ \text{ori}} \cdot \underbrace{L' \ldots L'}_{(t-r)\text{ori}} \cdot W)$.

(1.8) Lemă. *Dacă* $0 \to F' \to F \to F'' \to 0$ *este un şir exact de* O_V*-module coerente astfel încît* dim Supp$(F) \leqslant r$, *atunci*

$$(L_1 \ldots L_t \cdot F) = (L_1 \ldots L_t \cdot F') + (L_1 \ldots L_t \cdot F'').$$

Demonstrația rezultă imediat folosind definiția indicelui de intersecție şi aditivitatea caracteristicii Euler-Poincaré.

(1.9) Lemă. *Dacă* $D \in |L_1|$ *şi* $D \cap \mathrm{Ass}(F) = \emptyset$, *atunci punînd* $F_D = F \otimes O_D$, *avem* $(L_1 \ldots L_t \cdot F) = (L_2 \ldots L_t \cdot F_D)$. *În particular, dacă* dim $(V) \leqslant t$, *atunci* $(L_1 \ldots L_t) = (L_2 \ldots L_t \cdot D)$.

Demonstrație. Deoarece $D \cap \mathrm{Ass}(F) = \emptyset$, avem şirul exact $0 \to F \otimes L_1^{-1} \to F \to F_D \to 0$ (dacă $D = \mathrm{div}_V(s)$ cu $s \in H^0(L_1)$, atunci condiția $D \cap \mathrm{Ass}(F) = \emptyset$ înseamnă că s nu este divizor al lui zero în fibra F_x a lui F într-un punct arbitrar $x \in V$). Tensorizînd cu $L_1^{n_1} \otimes \ldots \otimes L_t^{n_t}$ obținem şirul exact

$$0 \to F \otimes L_1^{n_1-1} \otimes L_2^{n_2} \otimes \ldots \otimes L_t^{n_t} \to F \otimes L_1^{n_1} \otimes \ldots \otimes L_t^{n_t} \to$$
$$\to F_D \otimes L_1^{n_1} \otimes \ldots \otimes L_1^{n_t} \to 0$$

din care deducem egalitatea

$$\chi(F_D \otimes L_1 \otimes \ldots \otimes L_t) = \chi(F \otimes L_1^{n_1} \otimes \ldots \otimes L_t^{n_t}) - \chi(F \otimes L_1^{n_1-1} \otimes L_2^{n_2} \otimes \ldots$$
$$\ldots \otimes L_t^{n_t}) = (L_1 \ldots L_t \cdot F) \cdot n_1 \ldots n_t + \ldots - (L_1 \ldots L_t \cdot F) \cdot (n_1 -$$
$$- 1)\, n_2 \ldots n_t - \ldots = (L_1 \ldots L_t \cdot F)\, n_2 \ldots n_t + \ldots .$$

Însă luînd $n_1 = 0$ în polinomul $\chi(F_D \otimes L_1^{n_1} \otimes \ldots \otimes L_t^{n_t})$ obținem de asemenea

$$\chi(F_D \otimes L_1^{n_1} \otimes \ldots \otimes L_t^{n_t}) = (L_2 \ldots L_t \cdot F_D) \cdot n_2 \ldots n_t + \ldots, \qquad \text{Q.E.D.}$$

Presupunem acum că $X = \text{Supp}(F)$ este conținut în subschema închisă W a lui V, astfel încît subschema închisă X definită de idealul $\text{Ann}(F)$ este de asemenea subschemă închisă în W. Atunci F poate fi considerat ca O_W-modul coerent și avem

$$F \otimes L_1^{n_1} \otimes \ldots \otimes L_t^{n_t} = (F \otimes O_W) \otimes L_1^{n_1} \otimes \ldots \otimes L_t^{n_t} = F \otimes L_{1,W}^{n_1} \otimes \ldots \otimes L_{t,W}^{n_t}.$$

unde prin $L_{i,W}$ am notat fasciculul $L_i \otimes O_W$. Obținem deci:

(1.10) LEMĂ. *În situația de mai sus avem egalitatea*

$$(L_1 \ldots L_t \cdot F)_V = (L_{1,W} \ldots L_{t,W} \cdot F)_W.$$

În particular,

$$(L_1 \ldots L_t \cdot W)_V = (L_{1,W} \ldots L_{t,W})_W.$$

Fie acum $V_1, \ldots, V_n$ componentele ireductibile ale lui V. Notăm $V_i^0 = V_i - \bigcup_{j \neq i} V_j = V - \bigcup_{j \neq i} V_j$, $i = 1, \ldots, n$. Cum V_i^0 este deschis în V și (deschis) dens în V_i, rezultă, ținînd cont de EGA I, 9.5.10, că pe V_i avem o structură bine determinată de schemă. Obținem:

(1.11) COROLAR. *Presupunem* $V = \text{Supp}(F)$ *și fie* $V_1, \ldots, V_n$ *componentele ireductibile ale lui* V *înzestrate cu structurile de subschemă descrise mai sus. Dacă notăm* $F_i = F \otimes O_{V_i}$, *atunci are loc:*

$$(L_1 \ldots L_t \cdot F) = (L_1 \ldots L_t \cdot F_1) + \ldots + (L_1 \ldots L_t \cdot F_n).$$

Demonstrație. În șirul exact $0 \to K \to F \xrightarrow{\alpha} \bigoplus_{i=1}^{n} F_i \to C \to 0$ avem $\text{Supp}(K)$, $\text{Supp}(C) \subseteq \bigcup_{i \neq j} V_i \cap V_j$, deci $\dim \text{Supp}(K)$, $\dim \text{Supp}(C) < t$. Ținînd cont de (1.5) și (1.8) avem succesiv:

$$(L_1 \ldots L_t \cdot F) = (L_1 \ldots L_t \cdot K) + (L_1 \ldots L_t \cdot \text{Im}(\alpha)) =$$

$$= (L_1 \ldots L_t \cdot \bigoplus_{i=1}^{n} F_i) - (L_1 \ldots L_t \cdot C) = \sum_{i=1}^{n} (L_1 \ldots L_t \cdot F_i). \qquad \text{Q.E.D.}$$

(1.12) COROLAR. *Presupunem* V *ireductibilă și* $\dim(V) \leq t$. *Fie* $x \in V$ *punctul generic al lui* V și $d = \text{lung}_{O_x}(F_x)$ *lungimea* O_x-*modulului* F_x. *Atunci*

$$(L_1 \ldots L_t \cdot F) = d\,(L_1 \ldots L_t \cdot V_{\text{red}}).$$

Demonstrație. Cum O_x este un inel artinian și F un O_x-modul coerent, fibra F_x este întotdeauna un O_x-modul de lungime finită. Dacă dim Supp$(F) < t$, corolarul este evident. De asemenea, corolarul este evident cînd $F = O_{V_{red}}$. Fie $\mathscr{L}'$ clasa tuturor O_V-modulelor coerente pentru care corolarul (1.12) este adevărat. Deoarece $(L_1 \ldots L_t \cdot F)$ și $\text{lung}_{O_x}(F_x)$ sînt ambele funcții aditive de F, $\mathscr{L}'$ este subclasă exactă a categoriei $\mathscr{L}$ a tuturor O_V-modulelor coerente și corolarul rezultă atunci din lema de dévissage (EGA III 3.1.2).

(1.13) COROLAR. *Fie W o subschemă închisă a lui V de dimensiune t și fie $D \in |L_{1,W}|$. Atunci*

$$(L_1 \ldots L_t \cdot W) = (L_2 \ldots L_t \cdot D).$$

Demonstrație. Avem succesiv:

$$(L_1 \ldots L_t \cdot W) = (L_{1,W} \ldots L_{t,W}) = \quad \text{(după (1.10))}$$

$$= (L_{2,W} \ldots L_{t,W} \cdot D) = \quad \text{(după (1.9))}$$

$$= (L_2 \ldots L_t \cdot D) \quad \text{(după (1.10))}. \qquad \text{Q.E.D.}$$

(1.14) Fie $f : V' \to V$ un morfism de k-scheme algebrice complete și ireductibile V' și V de puncte generice x' și x respectiv. Avem: a) $f(x') = x \Leftrightarrow \dim f(V') = \dim(V)$; b) Dacă $f(x') = x$, atunci fiecare O_x-modul de lungime finită M este un O_x-modul de lungime finită $\Leftrightarrow \dim(V') = \dim(V)$, și în acest caz are loc formula

$$\text{lung}_{O_x}(M) = [k(x') : k(x)]\, \text{lung}_{O_x}(M).$$

(1.15) DEFINIȚIE. Fie $f : V' \to V$ un morfism între două k-scheme algebrice complete și ireductibile V' și V de puncte generice x' și x respectiv. Gradul lui f este prin definiție următorul număr rațional:

$$\deg(f) = \begin{cases} \text{lung}_{O_x}(O_{x'})/\text{lung}_{O_x}(O_x) & \text{dacă } \dim(V') = \dim(V) = \dim f(V'). \\ 0 & \text{în caz contrar.} \end{cases}$$

(1.16) *Exemple.* a) Fie $f : V_{red} \hookrightarrow V$ morfismul canonic de incluziune, și $n = \text{lung}_{O_x}(O_x)$. Atunci $\deg(f) = 1/n$.

b) Fie $f : V' \to V$ un morfism birațional, adică un morfism f cu proprietățile : $f(x') = x$ și omomorfismul local $O_x \to O_{x'}$ corespunzător izomorfism. Atunci $\deg(f) = 1$.

c) Fie $f : V' \to V$ un morfism cu $\deg(f) > 0$. Dacă V' și V sînt integre, atunci $\deg(f) = [k(x') : k(x)]$.

(1.17) Lemă. *Fie* $f : V' \to V$, $g : V'' \to V'$ *și* $h = f \circ g$, *unde* V'', V' *și* V *sînt k-scheme algebrice complete și ireductibile. Atunci* $\deg(h) = \deg(f) \cdot \deg(g)$, *afară de cazul cînd* $\dim(V') > \dim(V'') = \dim(V) = \dim(h(V''))$.

Demonstrație. Presupunem $\deg(h) > 0$. Atunci $\dim(V'') = \dim(V) = \dim h(V'') \leqslant \dim g(V'')$, $\dim f(V') \leqslant \dim(V')$. Deci $\deg(f)$, $\deg(g) > 0$ afară de cazul cînd $\dim(V') > \dim(V'') = \dim(V) = \dim h(V'')$. Presupunînd deci $\deg(f) > 0$, $\deg(g) > 0$, atunci $\deg(h) > 0$ și $\mathrm{lung}_{O_x}(O_{x''}) = [k(x') : k(x)] \cdot \mathrm{lung}_{O_{x'}}(O_{x''}) = [k(x') : k(x)] \cdot \mathrm{lung}_{O_{x'}}(O_{x'}) \cdot \deg(g) = \mathrm{lung}_{O_x}(O_{x'}) \cdot \deg(g)$ (unde x'', x', x reprezintă punctele generice ale lui X'', X', X respectiv). Q.E.D.

(1.18) Lemă. *Fie* $f : V' \to V$ *un morfism de scheme algebrice complete și ireductibile peste k și presupunem* $t \geqslant \dim(V')$, $\dim(V)$. *Fie* $L_1 \ldots, L_t$ t O_V*-module inversibile și* $L'_i = f^*(L_i)$, $i = 1, \ldots, t$. *Atunci are loc formula :*

$$(L'_1 \ldots L'_t)_{V'} = (\deg(f)) \cdot (L_1 \ldots L_t)_V.$$

Demonstrație. Punînd $L = L_1^{n_1} \otimes \ldots \otimes L_t^{n_t}$ și $L' = L_1'^{n_1} \otimes \ldots \otimes L_t'^{n_t}$, avem $L' = f^*(L)$ și $R^q f_*(L') = R^q f_*(O_{V'} \otimes L') = R^q f_*(O_{V'}) \otimes L$ (formula proiecției). Considerînd șirul spectral Leray

$$E_2^{pq} = H^p(V, R^q f_*(L')) = H^p(V, R^q f_*(O_{V'}) \otimes L) \Rightarrow H^{p+q}(V', L')$$

și ținînd cont că termenul E_{n+1} se obține luînd omologia lui E_n, obținem

$$(*) \qquad \chi(L') = \sum_{q=0}^{\infty} (-1)^q \chi(R^q f_*(O_{V'}) \otimes L).$$

Pasul 1 : $\deg(f) = 0$. Deci $\dim f(V') < t$. Atunci $\dim \mathrm{Supp}\,(R^q f_* O_{V'}) < t$ pentru orice q, deci $\chi(R^q f_*(O_{V'}) \otimes L_1^{n_1} \otimes \ldots \otimes L_t^{n_t})$ este un polinom numeric de grad $< t$, deci $\chi(L_1'^{n_1} \otimes \ldots \otimes L_t'^{n_t})$ are aceeași proprietate. Rezultă deci $(L'_1 \ldots L'_t)_{V'} = 0$.

Pasul 2 : f morfism birațional. Atunci f induce un izomorfism biregulat de la un deschis din V' pe un deschis din V, deci pentru

orice $q>0$, dim Supp $R^q f_*(O_{V'}) < t$. Rezultă că partea omogenă de grad t a polinomului $\chi(L_1'^{n_1} \otimes \ldots \otimes L_t'^{n_t})$ coincide cu partea omogenă de grad t a polinomului $\chi(f_*(O_{V'}) \otimes L_1^{n_1} \otimes \ldots \otimes L_t^{n_t})$. Pe de altă parte avem şirul exact

$$0 \to K \to O_V \xrightarrow{\alpha} f_*(O_{V'}) \to C \to 0$$

cu dim Supp(K), dim Supp$(C) < t$. Aplicînd (1.5) şi (1.8) deducem imediat că partea omogenă de grad t din polinomul $\chi(L_1^{n_1} \otimes \ldots \otimes L_t^{n_t})$ coincide cu partea omogenă de grad t din polinomul $\chi(f_*(O_{V'}) \otimes \otimes L_1^{n_1} \otimes \ldots \otimes L_t^{n_t})$. Deducem deci egalitatea

$$(L_1' \ldots L_t')_{V'} = (L_1 \ldots L_t)_V.$$

Pasul 3. *f finit*, deg$(f) > 0$ *şi* V' *şi* V *reduse*. Atunci f este morfism afin şi deci $R^q f_*(O_{V'}) = 0$ pentru orice $q > 0$. Deci $(L_1' \ldots \ldots L_t')_{V'} = (L_1 \ldots L_t . f_*(O_{V'}))_V$.

Aplicînd (1.12) ultimului termen, avem $d = \text{lung}_{O_x} f_*(O_{V'})_x = [k(x') : k(x)] = \deg(f)$, de unde concluzia şi în acest caz.

Pasul 4 : $V' = V_{red}$ *şi* $f : V_{red} \hookrightarrow V$ *incluziunea canonică*. Atunci concluzia decurge din (1.12).

Pasul 5 : *Cazul general şi* deg$(f) > 0$. Considerăm atunci descompunerea următoare a morfismului f:

$$\begin{array}{ccccc} Y & \xrightarrow{\text{bir}} & V'_{red} & \hookrightarrow & V' \\ \downarrow{\scriptstyle \text{bir}} & & & & \downarrow{\scriptstyle f} \\ X & \xrightarrow[\text{finit}]{} & V_{red} & \hookrightarrow & V \end{array}$$

în care X este normalizata lui V_{red} în corpul funcţiilor raţionale al lui V'_{red}, iar Y este „join"-ul lui X cu V'_{red}. Pasul 5 rezultă din descompunerea considerată şi paşii 2—4. Q.E.D.

(1.19) Lemă. *Simbolul* $(L_1 \ldots L_t \cdot F)_V$ *este unic determinat de proprietăţile din lemele* (1.5), (1.6), (1.8), (1.9), (1.10) şi (1.18).

Demonstraţie. Fie $\langle L_1 \ldots L_t \cdot F \rangle_V$ un alt simbol satisfăcînd lemele (1.5), (1.6), (1.8), (1.9), (1.10) şi (1.18). Atunci acest simbol satisface şi corolariile (1.11), (1.12) şi (1.13), care se deduc în mod formal din lemele de mai sus. Vom arăta că

$$\langle L_1 \ldots L_t \cdot F \rangle_V = (L_1 \ldots L_t \cdot F)_V.$$

După (1.10) putem presupune că $V = \mathrm{Supp}(F)$, după (1.11) că V este ireductibilă, după (1.12) că V este integră și $F = O_V$, după lema lui Chow și (1.18) că V este proiectivă. Vom arăta atunci prin inducție după t că $\langle L_1 \ldots L_t \cdot W\rangle_V = (L_1 \ldots L_t \cdot W)_V$, cu W subschemă închisă a lui V arbitrară de dimensiune t. Cînd $t = 0$ totul este clar din (1.5). Presupunem deci $t > 0$. Atunci L_1 poate fi scris sub forma $L_1 = O_V(H - H')$ cu H și H' divizori Cartier foarte ampli pe V. Fie $M = O_V(H)$ și $N = O_V(H')$. Atunci

$$(L_1 \ldots L_t \cdot W)_V = (M \cdot L_2 \ldots L_t \cdot W)_V - (N \cdot L_2 \ldots L_t \cdot W)_V \quad \text{după (1.6)}$$

$$= (L_2 \ldots L_t \cdot W \cap H)_V - (L_2 \ldots L_t \cdot W \cap H')_V \quad \text{după (1.9)}$$

$$= \langle L_2 \ldots L_t \cdot W \cap H\rangle_V - \langle L_2 \ldots L_t \cdot W \cap H'\rangle_V \quad \text{ipoteza de inducție}$$

$$= \langle L_1 \ldots L_t \cdot W\rangle_V \quad \text{după (1.9) și (1.6).}$$ Q.E.D.

(1.20) COROLAR. *Dacă V este o suprafață proiectivă și nesingulară, atunci $(L_1 \cdot L_2)$ coincide cu indicele clasic de intersecție.*

(1.21) LEMĂ. *Dacă V este o schemă algebrică completă peste k și W o subschemă închisă a lui V de dimensiune t, atunci pentru orice O_V-modul inversibil L numărul $(L^{\cdot t}.W)$ coincide cu $t\,!a$, unde a este coeficientul lui n^t din $\chi(L^n \otimes O_W)$.*

Demonstrație. Înlocuind pe V cu W, pe L cu $L \otimes O_W$, putem presupune că $W = V$ datorită lui (1.10). Fie $n = n_1 + \ldots + n_t$. Atunci $\chi(L^{n_1} \otimes \ldots \otimes L^{n_t}) = \chi(L^n)$, deci $an^t + a_{n-1} t^{n-1} + \ldots = a(n_1 + \ldots + n_t)^t + \ldots$. Deoarece coeficientul lui $n_1 \ldots n_t$ din dezvoltarea $(n_1 + \ldots + n_t)^t$ este $t\,!a$, atunci (1.21) rezultă direct din definiția indicelui de intersecție. Q.E.D.

Sîntem acum în măsură să demonstrăm următorul criteriu important de amplitudine.

(1.22) TEOREMĂ. (Criteriul Nakai-Moishezon). *Fie V o schemă algebrică completă peste k și fie L un O_V-modul inversibil. Atunci L este amplu dacă și numai dacă pentru orice subschemă W închisă, integră și de dimensiune $t > 0$ avem $(L^t \cdot W) > 0$.*

Demonstrație. Mai întîi cîteva observații :

a) Fie $V_1 \ldots, V_n$ componentele ireductibile ale lui V, cu structurile de subscheme închise descrise înainte de (1.11). Atunci după Hartshorne [3], pag. 24, L este amplu dacă și numai dacă $L \otimes O_{V_i}$ este amplu pentru orice $i = 1, \ldots, n$.

b) Fie V ireductibilă. Atunci L este amplu dacă şi numai dacă $L \otimes O_{V_{red}}$ este amplu (cf. EGA II, 4.5.14).

c) L îndeplineşte condiţia numerică din enunţul teoremei (1.22) dacă şi numai dacă pentru orice componentă integră $V_{i,red}$ a lui V $L \otimes O_{V_{i,red}}$ îndeplineşte aceeaşi condiţie pentru $V_{i,red}$.

Din aceste trei observaţii deducem că, fără a restrînge generalitatea, putem presupune că V este în plus integră.

Presupunem acum că L este amplu. Există atunci un $n > 0$ astfel încît L^n este foarte amplu. Atunci, deoarece V este integră, L^n este de forma $O_V(D)$ cu D divizor Cartier efectiv şi foarte amplu. Altfel spus, există o scufundare $V \hookrightarrow P^m$ şi un hiperplan H în P^m astfel încît $D = H \cap V$ (în sensul imaginii inverse de divizori). Fie atunci W o subschemă închisă şi integră a lui V de dimensiune

$$t > 0. \text{ Avem } (L^{\cdot t}\cdot W) = 1/n^t \cdot (O_V(D)^{\cdot t}\cdot W)_V = 1/n^t \cdot (\underbrace{D \ldots D}_{t \text{ ori}} \cdot W)_V =$$

$$= 1/n^t \cdot (\underbrace{H \ldots H}_{t \text{ ori}} \cdot W)_{P^m} = 1/n^t \cdot \deg(W) > 0.$$

Reciproc, presupunem că pentru orice subschemă închisă şi integră W a lui V de dimensiune $t > 0$, avem $(L^{\cdot t}\cdot W) > 0$. Avem de demonstrat că L este amplu. Vom proceda prin inducţie după $d = \dim(V)$. Dacă $d = 0$ teorema este trivială. Dacă V este o curbă (integră), ştim că $\deg(L) = (L)_V > 0$. Fie $f : V' \to V$ morfismul biraţional de normalizare. Atunci V' este o curbă proiectivă şi nesingulară, iar după (1.18) $\deg f^*(L) = \deg(L) > 0$. Din teorema Riemann-Roch pentru curba V' rezultă că $(f^*(L))^n$ este foarte amplu dacă $n > 2\,p_a(V') + 1$, de unde rezultă că $f^*(L)$ este amplu. Cum însă f este un morfism finit, rezultă că L este de asemenea amplu (această afirmaţie rezultă de exemplu folosind criteriul coomologic de amplitudine din EGA. III, 2.3.1, cu ajutorul căruia se poate demonstra şi observaţia a) de mai sus).

Presupunem acum $d \geqslant 2$, V integră şi L/W amplu pentru orice subschemă închisă $W \subsetneqq V$ (prin ipoteza de inducţie, deoarece $\dim(W) < \dim(V)$).

Pasul 1. $\chi(L^n) \to \infty$ *cînd* $n \to \infty$.

Într-adevăr, $(L^{\cdot d}) = d\,!a > 0$ (cf. 1.21)), unde $\chi(L^n) = a \cdot n^d + \ldots$. Rezultă $a > 0$ şi afirmaţia este clară.

Pasul 2. *Putem presupune că* $L = O_V(D)$ *cu* D *divizor efectiv.*

Pentru aceasta va fi suficient (înlocuind pe L cu L^n) să dovedim că $H^0(L^n) \neq 0$ pentru $n \geqslant 0$. Deoarece V este integră, putem privi pe L ca un subfascicul al fasciculului constant $k(V)$ al tuturor

funcţiilor raţionale pe V, şi atunci punem $I = L^{-1} \cap O_V$ şi $J = I \cdot L = I \otimes L = O_V$. Fie X şi Y subschemele închise ale lui V definite de idealele I şi J respectiv. Deoarece I şi J nu pot fi ideale nule, rezultă că X şi Y sînt subscheme închise proprii ale lui V, deci $L_X = L \otimes O_X$ şi $L_Y = L \otimes O_Y$ sînt ample pe X şi Y respectiv prin ipoteza de inducţie. După EGA III 2.3.1, $H^q(L_X^n) = H^q(L_Y^n) = 0$ pentru orice $q > 0$ şi $n \gg 0$. Însă din şirurile exacte

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & I \otimes L^n & \longrightarrow & L^n & \longrightarrow & L_X^n & \longrightarrow & 0 \\ & & \| & & & & & & \\ 0 & \longrightarrow & J \otimes L^{n-1} & \longrightarrow & L^{n-1} & \longrightarrow & L_Y^{n-1} & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

deducem că $H^q(L^n) = H^q(L^{n-1})$ pentru orice $q \geqslant 2$ şi $n \gg 0$. De aici rezultă că dacă $n \gg 0$, $\chi(L^n) = \dim H^0(L^n) - \dim H^1(L^n) + \text{const}$. Concluzia pasului 2 rezultă atunci din pasul 1.

Pasul 3. *L^n este generat de secţiunile sale globale pentru $n \gg 0$.*

Într-adevăr, după pasul 2 putem presupune $L = O_V(D)$ cu D divizor Cartier efectiv. Din şirul exact

$$0 \to L^{n-1} \to L^n \to L_D^n = L^n \otimes O_D \to 0$$

deducem, ţinînd cont că $H^1(L_D^n) = 0$ pentru $n \gg 0$ (L_D este amplu pe D prin ipoteza de inducţie), şirul exact de coomologie ($n \gg 0$):

$$(*) \qquad H^0(L^n) \to H^0(L_D^n) \to H^1(L^{n-1}) \to H^1(L^n) \to 0.$$

În particular, dacă $n \gg 0$ avem $\dim H^1(L^n) \leqslant \dim H^1(L^{n-1})$, şi cum $H^1(L^{n-1})$ este finit dimensional, rezultă că pentru $n \gg 0$ aplicaţiile $H^1(L^{n-1}) \to H^1(L^n)$ sînt izomorfisme. Revenind la şirul exact $(*)$deducem că pentru $n \gg 0$ aplicaţia de restricţie $H^0(L^n) \to H^0(L_D^n)$ este surjectivă. Cum L_D este amplu, L_D^n este generat de secţiunile sale globale pentru $n \gg 0$, deci există p secţiuni globale $s_1, \ldots, s_p \in H^0(L_D^n)$ astfel încît pentru orice $x \in D$ cel puţin una din ele nu se anulează în punctul x. Ridicînd aceste secţiuni la $s_1', \ldots, s_p' \in H^0(L^n)$ şi adăugînd şi o secţiune $s_0' \in H^0(L^n)$ astfel încît $D = \operatorname{div}_V(s_0')$, obţinem $p+1$ secţiuni globale ale lui L^n cu proprietatea că pentru orice $x \in V$ cel puţin una din ele nu se anulează în punctul x, ceea ce probează afirmaţia pasului 3.

Pasul 4. (*Concluzie*). După pasul 3 există un morfism $f: V \to P^m$ astfel încît $f^*(O_{P^m}(1)) \cong L^n$ (dacă n este suficient de mare). Atunci f este un morfism finit, deoarece în caz contrar ar exista o

curbă integră $C \subset V$ astfel încît $f(C)$ să fie un punct. Însă atunci $(L \cdot C)$ ar fi egal cu zero, ceea ce contrazice ipotezele. Cum f este morfism finit și $O_{P^m}(1)$ amplu, rezultă, în baza unui rezultat deja folosit mai sus, că L^n este amplu, deci L însuși amplu. Q.E.D.

(1.23) *Observație.* Ca să demonstrăm că dacă V este o curbă integră și $\deg(L) > 0$, atunci L este amplu, am folosit teorema Riemann-Roch pentru curbe nesingulare. Observăm totuși că această teoremă poate fi evitată, deoarece pașii 1—4 demonstrează în particular același lucru direct.

(1.24) COROLAR. *Dacă V este o suprafață completă peste k și L este un O_V-modul inversibil, atunci L este amplu dacă și numai dacă $(L^{\cdot 2}) > 0$ și $(L \cdot C) > 0$ pentru orice curbă integră $C \subset V$. Dacă în plus $H^0(L) \neq 0$, atunci condiția $(L^{\cdot 2}) > 0$ poate fi suprimată.*

Demonstrație. Analizînd demonstrația teoremei (1.22), observăm că am folosit condiția $(L^2) > 0$ doar pentru a ne putea reduce la cazul cînd $H^0(L) \neq 0$. Q.E.D.

(1.25) TEOREMĂ. *Fie V o suprafață proiectivă peste k și L un O_V-modul inversibil astfel încît $(L \cdot C) \geqslant 0$ pentru orice curbă integră $C \subset V$. Atunci $(L^2) \geqslant 0$.*

Demonstrație. Fie $a, b > 0$ numere naturale și $L' = L^a \otimes H^b$, unde H este o secțiune hiperplană pe X. Atunci

$$(L'^{\cdot 2}) = a^2(L^{\cdot 2}) + 2ab\,(L \cdot H) + b^2(H^{\cdot 2}).$$

Punînd $m_0 = (L^{\cdot 2})$, $m_1 = (L \cdot H)$, $m_2 = (H^{\cdot 2})$, fie $P(t) = m_2 t^2 + 2 m_1 t + m_0$. Deoarece din ipoteze rezultă că $m_1 \geqslant 0$ și $m_2 > 0$ (H este divizor Cartier efectiv foarte amplu pe V), rezultă că $P(t)$ este o funcție strict crescătoare pe intervalul $[0,\infty)$. Dacă prin absurd $(L^{\cdot 2}) = m_0 < 0$, atunci P ar avea o singură rădăcină reală și strict pozitivă t_0. Dar dacă $b/a > t_0$, atunci $0 < a^2 P(b/a) = (L'^{\cdot 2})$. Cum pe de altă parte $(L' \cdot C) = a \cdot (L \cdot C) + b \cdot (H \cdot C) > 0$, rezultă, folosind (1.24), că L' este amplu. Deci L'^n este foarte amplu pentru $n \gg 0$, de unde, ținînd cont de ipoteze:

$$(L' . L) = 1/n \cdot (L'^n . L) \geqslant 0$$

Fie $Q(t) = m_1 t + m_0$. Avem $a \cdot Q(b/a) = a m_0 + b m_1 = a(L \cdot L) + b(L \cdot H) = (L' \cdot L) \geqslant 0$. Luînd $a/b > t_0$ și $|a/b - t_0|$ suficient de mic, deducem că $Q(t_0) \geqslant 0$. Atunci $P(t_0) \geqslant P(t_0) - Q(t_0) = m_2 t_0^2 + m_1 t_0 \geqslant m_2 t_0^2 > 0$, contradicție! Q.E.D.

Utilizînd teoria intersecției dezvoltată mai sus se poate demonstra esențialmente cu aceleași argumente următorul rezultat mai general decît (1.25), cf. Kleiman [1]:

(1.26) TEOREMĂ. (Kleiman). *Fie V o K-schemă completă de dimensiune $\geqslant 2$, și L un O_V-modul inversibil. Atunci $(L^{\cdot t} \cdot W) \geqslant 0$ pentru orice subschemă închisă și integră W de dimensiune $t > 0$, dacă și numai dacă $(L \cdot C) \geqslant 0$ pentru orice curbă integră $C \subset V$.*

(1.27) *Observație.* După cum rezultă din contraexemplele date de Mumford și Ramanujam, condiția „$(L^{\cdot t} \cdot W) > 0$ pentru orice subschemă închisă și integră $W \subseteq V$ de dimensiune $t > 0$" nu rezultă în general din condiția „$(L \cdot C) > 0$ pentru orice curbă integră $C \subset V$". Mai precis:

a) Mumford a construit un exemplu de suprafață proiectivă și nesingulară V peste corpul complex și un divizor D astfel încît $(D \cdot C) > 0$ pentru orice curbă integră $C \subset V$ și totuși $(D^2) = 0$ (a se vedea Hartshorne [3], pag. 56).

b) Ramanujam a construit un exemplu de varietate algebrică V proiectivă și nesingulară de dimensiune 3 și un divizor *efectiv* D astfel încît $(D \cdot C) > 0$ pentru orice curbă integră C pe V, și totuși fără ca D să fie amplu (a se vedea Hartshorne [3], pag. 57).

Ca o aplicație a criteriului Nakai-Moishezon pentru suprafețe, vom demonstra:

(1.28) TEOREMĂ. (Zariski-Goodman). *Fie X o suprafață completă și nesingulară și $U \subset X$ un deschis afin nevid. Atunci $F = X - U$ este o mulțime algebrică conexă, de codimensiune pură 1 în X și care suportă un divizor efectiv amplu. În particular, X este proiectivă.*

Demonstrație. Fie $F_1, \ldots, F_n$ componentele ireductibile (și reduse) ale lui F.

Pasul 1. dim $(F_i) = 1$ *pentru orice* $i = 1, \ldots, n$.

Fie $x_i \in F_i - \bigcup_{j \neq i} F_j$ un punct închis, $i = 1, \ldots, n$, și fie V_i o vecinătate deschisă și afină a lui x_i astfel încît $V_i \cap (\bigcup_{j \neq i} F_j) = \emptyset$. Atunci $V_i - V_i \cap U = V_i \cap F_i$ și $V_i \cap U$ este un deschis afin în X. Dacă F_i nu ar fi curbă, atunci F_i ar fi un punct, anume punctul x_i. Din criteriul de normalitate al lui Serre rezultă atunci cu ușurință că omomorfismul de restricție $H^0(V_i, O_X) \to H^0(V_i - \{x_i\}, O_X)$ este un izomorfism, ceea ce contrazice faptul că V_i și $V_i \cap U = V_i - \{x_i\}$ sînt varietăți afine în care incluziunea $V_i \cap U \hookrightarrow V_i$ nu este un izomorfism.

Pasul 2. *F este o mulțime conexă.*

Fie Y o închidere proiectivă a deschisului afin U. Obţinem o aplicaţie biraţională $f: X \to Y$ astfel încît f/U este un izomorfism. Din teorema de eliminare a nedeterminărilor (cf. Safarevici [1], pag. 296) rezultă că după un număr finit de eclatări de puncte din afara lui U, obţinem un morfism biraţional $g: X' \to X$ astfel încît $f \circ g$ să fie un morfism, iar $g^{-1}(U) = U'$ este izomorf via g cu U. Se observă că este suficient să demonstrăm că $X' - U'$ este conex, altfel spus, putem, fără a restrînge generalitatea, presupune că f este un morfism biraţional. Mai mult, putem presupune Y normală, înlocuind eventual pe Y cu normalizata sa via factorizarea Stein a morfismului f. Presupunem prin absurd că $X - U$ nu ar fi conexă. Deoarece este clar că $Y - f(U)$ suportă un divizor amplu (anume intersecţia lui Y cu hiperplanul de la infinit), rezultă din lema Enriques-Severi-Zariski-Serre (cf. Serre [1], § 76, teorema 4) că $Y - f(U)$ este conexă. Cum din teorema de conexiune a lui Zariski (cf. EGA III 4.3.1) deducem că morfismul f are fibre conexe, rezultă atunci că $X - U = f^{-1}(Y - f(U))$ este de asemenea conexă.

Pasul 3. *Există un divizor* $D' = \sum_{i=1}^{n} m_i F_i$, *cu* $m_i \geqslant 0$, *astfel încît* $(D' \cdot F_i) \geqslant 0$ *pentru orice* i *şi* $(D' \cdot F_i) > 0$ *pentru cel puţin un* i.

Într-adevăr, fie $f \in \Gamma(U, O_X)$ o funcţie neconstantă ; adăugînd eventual o constantă convenabilă lui f, putem presupune că pentru orice i există un $x_i \in F_i$ astfel încît $f(x_i) \neq 0$. Fie atunci $D = \operatorname{div}(f)_0$ şi $D' = \operatorname{div}(f)_\infty$, divizorul zerourilor şi respectiv divizorul polurilor funcţiei f. Avem $D - D' = \operatorname{div}(f)$, iar $\operatorname{Supp}(D') \subseteq F$, deci $D' = \sum_{i=1}^{n} m_i F_i$ cu $m_i \geqslant 0$ pentru orice i şi $m_i > 0$ pentru cel puţin un i. Însă cum $(D \cdot F_i) \geqslant 0$ pentru orice i şi $(D \cdot F_i) > 0$ pentru cel puţin un i (altfel U ar conţine curbe complete), pasul 3 rezultă ţinînd cont că $D' \sim D$.

Pasul 4. Folosind paşii 2 şi 3, putem renumerota componentele F_i (acceptînd şi repetiţii) astfel încît $(D' \cdot F_1) > 0$ şi $(F_i \cdot F_{i+1}) > 0$ pentru orice i. Vom nota prin $F_1, \ldots, F_m$ componentele lui F în noua ordine (cu repetiţii).

Pasul 5. *Arătăm prin inducţie după* $r = 1, \ldots, m+1$ *că există un divizor* $D_r = \sum_{i=1}^{m} n_i F_i$, $n_i \geqslant 0$, *astfel încît*

a) $(D_r \cdot F_i) \geqslant 0$ *pentru orice* $i = 1, \ldots, m$.

b) $(D_r \cdot F_i) > 0$ *pentru orice* $i = 1, \ldots, \min(r, m)$.

c) $F_1, \ldots, F_{r-1} \subseteq \operatorname{Supp}(D_r)$.

Într-adevăr, pentru $r = 1$ luăm $D_1 = D'$ construit la pasul 3. Presupunem acum că am construit $D_1, \ldots, D_r$, $r \leqslant m$. După b) avem $(D_r \cdot F_r) > 0$. Putem deci alege un întreg $e_r > 0$ cu proprietatea $e_r(D_r \cdot F_r) + (F_r^2) > 0$ şi atunci punem $D_{r+1} = e_r D_r + F_r$. Este clar că $F_1, \ldots, F_r$ apar în D_{r+1} cu coeficienţi strict pozitivi şi că $\mathrm{Supp}(D_{r+1}) = \mathrm{Supp}\,(D_r) \cup F_r$. Avem $(D_{r+1} \cdot F_i) = e_r(D_r \cdot F_i) + (F_r \cdot F_i)$, şi deci $(D_{r+1} \cdot F_r) > 0$ ţinînd cont de modul de alegere al lui e_r. Prin inducţie şi pasul 4 rezultă imediat $(D_{r+1} \cdot F_i) \geqslant 0$ pentru orice i. Rămîne de probat b) pentru D_{r+1}. Deosebim două cazuri:

1) $r < m$. Avem $\min\,(r + 1, m) = r + 1$. Atunci $(D_{r+1} \cdot F_i) > 0$, prin inducţie dacă $i < r$ şi $F_i \neq F_r$, prin modul de alegere al lui e_r dacă $F_i = F_r$, şi prin inducţie şi ordinea de la pasul 4 dacă $i = r + 1$.

2) $r = m$. Atunci pentru orice $i = 1, \ldots, m$ avem $(D_{r+1} \cdot F_i) > 0$ prin inducţie dacă $F_i \neq F_m$ sau prin modul de alegere al lui e_m dacă $F_i = F_m$.

Pasul 6. (*Concluzie*) D_{m+1} *este amplu.*

Pentru aceasta folosim criteriul Nakai-Moishezon (1.24). Fie $C \subset X$ o curbă integră arbitrară. Atunci U fiind afină, $C \nsubseteq U$. Dacă $C \neq F_i$ pentru orice i, avem $(C \cdot F_i) \geqslant 0$ pentru orice i, cu inegalitate strictă pentru cel puţin un i. Deci după pasul 5 c), $(D_{m+1} \cdot C) > 0$. Pe de altă parte, dacă $C = F_i$ pentru un i, atunci $(D_{m+1} \cdot C) > 0$ după pasul 5 b). În fine, deoarece D_{m+1} este divizor efectiv, putem aplica ultima parte a corolarului (1.24). Q.E.D.

(1.29) *Observaţie.* Analogul în dimensiune $\geqslant 3$ al teoremei (1.28) este fals. Într-adevăr, există exemple elementare (datorate lui Hironaka) de varietăţi algebrice de dimensiune 3, care sînt complete şi nesingulare, dar care nu sînt proiective (vezi Safarevici [1], pag. 399).

(1.30) *Referinţe bibliografice.* Principala sursă bibliografică a acestui paragraf o constituie Kleiman [1]. Teorema (11.28) aparţine lui Zariski, iar demonstraţia prezentată aici lui Goodman (vezi Hartshorne [3], pag. 69–71).

§ 2.

TEOREMA LUI HODGE DE INDEX. STRUCTURA MATRICEI DE INTERSECŢIE A UNEI FIBRE

În tot acest paragraf prin X vom nota o suprafaţă proiectivă şi nesingulară definită peste corpul algebric închis k de caracteristică arbitrară, iar prin K, un divizor canonic pe X.

(2.1) LEMĂ. *Fie* D_1 *şi* D_2 *doi divizori pe suprafaţa* X *şi fie* $E_2 \in |D_2|$. *Atunci funcţia* $E \mapsto E + E_2 : |D_1| \to |D_1 + D_2|$ *este injectivă, deci* $\dim\ |D_1| \leqslant \dim\ |D_1 + D_2|$.

Demonstraţia este evidentă.

(2.2) PROPOZIŢIE. *Dacă* D *este un divizor pe* X *astfel încît* $(D^2) > 0$ *şi dacă* H *este o secţiune hiperplană pe* X, *atunci are loc una şi numai una din situaţiile:*

i) $(D \cdot H) > 0$ *şi* $\dim\ |nD| \to \infty$ *cînd* $n \to \infty$, *sau*

ii) $(D \cdot H) < 0$ *şi* $\dim\ |nD| \to \infty$ *cînd* $n \to \infty$.

Demonstraţie. Din teorema Riemann-Roch deducem:
$\dim\ |nD| + \dim\ |K - nD| \geqslant 1/2\, n^2(D^2) - 1/2n(D \cdot K) + \chi(O_X) - 2$, şi deci $\dim |nD| + \dim |K - nD| \to \infty$ cînd $n \to \infty$ (deoarece $(D^2) > 0$).

Afirmaţia 1: Nu poate avea loc situaţia $\dim\ |nD| \to \infty$ şi $\dim\ |K - nD| \to \infty$ cînd $n \to \infty$ (sau cînd $n \to -\infty$).

Într-adevăr, în caz contrar ar exista un $E \in |nD|$, deci după (2.1), $\dim\ |K - nD| \leqslant \dim\ |K|$, absurd.

Afirmaţia 2: $\dim\ |nD|$ nu poate tinde la ∞ atît pentru $n \to \infty$, cît şi pentru $n \to -\infty$.

Într-adevăr, dacă $\dim\ |nD| \to \infty$ cînd $n \to \pm\infty$, atunci pentru $n \gg 0$ ar exista un $E \in |-nD|$, deci după (2.1) $\dim\ |nD + E| = \dim\ |nD - nD| \geqslant \dim\ |nD| \to \infty$, absurd.

Afirmația 3 : dim $|K - nD|$ nu poate tinde la ∞ atît pentru $n \to \infty$ cît și pentru $n \to -\infty$.

Într-adevăr, în caz contrar pentru $n \geqslant 0$ ar exista un $E \in |K - nD|$ și după (2.1) avem $\dim|2K| = \dim|(K + nD) + (K - nD)| \geqslant \dim|K - nD| \to \infty$, absurd.

Din aceste trei afirmații rezultă imediat concluzia. Q.E.D.

(2.3) COROLAR. *Dacă D este un divizor pe X și H o secțiune hiperplană pe X astfel încît $(D \cdot H) = 0$, atunci $(D^2) \leqslant 0$, iar $(D^2) = 0$ dacă și numai dacă $D \approx 0$.*

Demonstrație. Numai ultima afirmație necesită demonstrație. Dacă D nu ar fi numeric echivalent cu zero, ar exista un divizor E pe X astfel încît $(D \cdot E) \neq 0$. Punînd $E' = (H^2) \cdot E - (E \cdot H) \cdot H$, avem :

$$(D \cdot E') = (H^2) \cdot (D \cdot E) - (E \cdot H) \cdot (H \cdot D) = (H^2) \cdot (D \cdot E) \neq 0.$$

$$(H \cdot E') = (H^2) \cdot (H \cdot E) - (H \cdot E) \cdot (H^2) = 0.$$

Înlocuind pe E cu E' putem deci presupune în plus că $(H \cdot E) = 0$. Punînd $D' = nD + E$, avem $(D' \cdot H) = 0$ și $(D'^2) = 2n \cdot (D \cdot E) + (E^2)$ pentru orice n întreg. Alegînd pe n convenabil obținem $(D'^2) > 0$ și $(D' \cdot H) = 0$, ceea ce contrazice (2.2). Q.E.D.

(2.4) COROLAR. (Teorema lui Hodge de index). *Dacă E este un divizor pe X astfel încît $(E^2) > 0$, atunci pentru orice divizor D pe X astfel încît $(E \cdot D) = 0$, avem $(D^2) \leqslant 0$, și în plus $(D^2) = 0$ dacă și numai dacă $D \approx 0$.*

Demonstrație. Dacă notăm $M = \mathrm{Num}(X) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$, atunci din teorema lui Néron-Severi rezultă că M este un $\mathbb{R}$-spațiu vectorial de dimensiune finită (anume $\dim_{\mathbb{R}}(M) = \rho = \mathrm{rang}\, NS(X)$). În plus, indicele de intersecție definește pe M o formă bilineară simetrică și nedegenerată pe M. Dacă h este clasa în M a unei secțiuni hiperplane H de pe X, și dacă completăm pe h la o bază a lui M peste $\mathbb{R}$, $h_1 = h, h_2, \ldots, h_\rho$, astfel încît $(h \cdot h_i) = 0$ pentru orice $i \geqslant 2$, atunci corolarul (2.3) afirmă că $(\cdot)$ are signatura $(1, \rho - 1)$ în această bază. Corolarul (2.4) rezultă din binecunoscuta teoremă a lui Sylvester privind invarianța signaturii unei forme bilineare simetrice pe M. Q.E.D.

(2.5) PROPOZIȚIE. *Fie $x \cdot y$ o formă bilineară simetrică pe $\mathbb{Q}$-spațiul vectorial M și fie $\{e_i\}_{i \in I}$ o familie finită de elemente din M ce generează pe M și astfel încît $e_i \cdot e_j \geqslant 0$ pentru orice $i \neq j$. Presupunem că există un $z \in M$, $z = \sum_i a_i e_i$, $a_i > 0$ pentru orice i, cu proprietatea $z \cdot e_i = 0$ pentru orice i. Atunci $x \cdot x \leqslant 0$ pentru orice $x \in M$, și, în plus, $\{x \in M \mid x \cdot x = 0\}$ este un subspațiu vectorial al lui M,*

de dimensiune egală cu numărul componentelor conexe ale grafului ale cărui vîrfuri sînt elementele lui I şi ale cărui săgeţi $\{i, j\}$ sînt astfel încît $e_i \cdot e_j > 0$.

Demonstraţie. Fiecare $x \in M$ poate fi scris sub forma $x = \sum_i c_i a_i e_i$, $c_i \in \mathbb{Q}$. Ţinînd cont că $\sum_j a_j e_j \cdot e_i = 0$, avem:

$$-\sum_i (c_i a_i e_i)\cdot(c_i a_i e_i) = \sum_{j,i} (c_i a_i e_i)\cdot(c_i a_j e_j) -$$
$$-\sum_i (c_i a_i e_i)\cdot(c_i a_i e_i) = \sum_{i\neq j} c_i^2 (a_i e_i)\cdot(a_j e_j) =$$
$$= 1/2 \sum_{i\neq j} (c_i^2 + c_j^2)(a_i e_i)\cdot(a_j e_j) \geqslant \sum_{i\neq j} c_i c_j (a_i e_i)\cdot(a_j e_j),$$

de unde $x \cdot x \leqslant 0$. În plus, $x \cdot x = 0$ dacă şi numai dacă $e_i \cdot e_j = 0$ sau dacă $e_i \cdot e_j > 0$, atunci $c_i = c_j$, deci dacă şi numai dacă funcţia $i \mapsto c_i$ este constantă pe fiecare componentă conexă a grafului asociat lui I. Q.E.D.

(2.6) COROLAR *Fie $f: X \to B$ un morfism de la o suprafaţă X pe o curbă nesingulară B, şi fie $D = \sum_i n_i E_i$, cu E_i curbe integre, $E_i \neq E_j$ pentru $i \neq j$, o fibră a lui f (deci $n_i > 0$). Atunci pentru orice divizor de forma $D' = \sum_i n'_i E_i$, cu $n_{i'}$ numere întregi, avem $(D'^2) \leqslant 0$. Dacă în plus f are fibre conexe, atunci $(D'^2) = 0$ dacă şi numai dacă există $a \in \mathbb{Q}$ astfel încît $D' = a \cdot D$.*

Demonstraţia rezultă direct din (2.5), luînd $M = \bigoplus_i \mathbb{Q} E_i$, indicele de intersecţie drept formă bilineară simetrică pe M şi $z = D$, deoarece se observă că $(D \cdot E_i) = 0$ pentru orice i.

(2.7) COROLAR. *Fie $f: X \to Y$ un morfism biraţional de la suprafaţa proiectivă şi nesingulară X la suprafaţa normală Y. Fie y un punct şi $f^{-1}(y) = \sum_{i=1}^{n} n_i E_i$ fibra corespunzătoare, în care presupunem că E_i sînt curbe integre distincte două cîte două. Atunci matricea de intersecţie $\|(E_i \cdot E_j)\|_{i,j}$ este definită negativ.*

Demonstraţie. Pentru fiecare i există o curbă integră D_i pe X diferită de E_j, $j = 1, \ldots, n$, astfel încît $(D_i \cdot E_i) > 0$ (adică $D_i \cap E_i \neq \emptyset$). Deoarece f este morfism propriu, $f(\bigcup_{i=1}^{n} D_i)$ este o submulţime închisă în Y ce conţine pe y. Fie g o funcţie raţională nenulă pe Y, definită într-o vecinătate deschisă U a lui y, şi care se anulează pe $f(\bigcup_{i=1}^{n} D_i) \cap U$. Atunci $\operatorname{div}_X(f^*(g)) = \sum_{i=1}^{n} m_i E_i + D$, cu $m_i \geqslant 1$ pentru orice i, $\operatorname{Supp}(D) \supseteq \bigcup_{i=1}^{n} D_i$, iar curbele $E_1, \ldots, E_n$ nu sînt

componente ale lui D. Deoarece $D/f^{-1}(U)$ este efectiv şi $E_i \subset \subset f^{-1}(U)$ pentru orice i, avem $(E_i \cdot D) > 0$ pentru orice i. De asemenea :

$$\left(E_j \cdot \sum_{i=1}^{n} m_i E_i + D\right) = (E_j \cdot \mathrm{div}_X (f^* (g))) = 0,$$

$$\left(D \cdot \sum_{i=1}^{n} m_i E_i + D\right) = (D \cdot \mathrm{div}_X(f^*(g))) = 0 \text{ pentru orice } j.$$

Luînd în (2.5) drept M $\mathbb{Q}$-spaţiul vectorial generat de baza $e_1 = E_1, \ldots, e_n = E_n$, $e_{n+1} = D$, $a_1 = m_1, \ldots, a_n = m_n$, $a_{n+1} = 1$, indicele de intersecţie drept formă bilineară simetrică, rezultă că dacă $D' = \sum_{i=1}^{n} m_i E_i$ avem $(D'^2) \leqslant 0$ şi în plus $(D'^2) = 0$ dacă şi numai dacă există un număr raţional a astfel încît $D' = a \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} m_i E_i + D\right)$, deci dacă şi numai dacă $D' = 0$. Q.E.D.

(2.8) *Referinţe bibliografice.* Prima demonstraţie algebrică (şi foarte elementară) a teoremei lui Hodge de index a fost dată de Grothendieck [1]. Demonstraţia prezentată aici este esenţialmente cea a lui Grothendieck (cf. Mumford [1] sau Bombieri-Husemoller [1]). Propoziţia (2.5) se găseşte în Safarevici [2] însă cu o demonstraţie mai complicată. Demonstraţia dată aici este cea din Bombieri-Husemoller [1]. Corolarul (2.7) a fost demonstrat de Mumford (a se vedea Mumford, *The topology of normal singularities of surfaces and a criterion for simplicity*, Publ. Math IHES, *9*, (1961), dar această proprietate a fost remarcată mult mai devreme de P. Du-Val (a se vedea P. Du-Val, *On isolated singularities which do not affect the condition of adjunction* I, Proc. Cambridge Phil. Soc., **30** (1933/34), 483—491).

3.

CRITERII DE CONTRACTIBILITATE ȘI SINGULARITĂȚI RAȚIONALE

În continuare prin cuvîntul suprafață vom înțelege o suprafață proiectivă și nesingulară. Dacă vor apărea și altfel de suprafețe, atunci vom specifica despre ce fel de suprafețe este vorba, de exemplu suprafețe normale, suprafețe afine etc.

Dacă X este o suprafață și $E = E_1 \cup E_2 \cup \ldots \cup E_n$ este o curbă conexă pe X de componente integre $E_1, \ldots, E_n$ (distincte două cîte două), atunci (2.7) arată că o condiție necesară pentru ca E să fie contractibilă la un punct este ca matricea de intersecție $\|(E_i \cdot E_j)\|_{i,j}$ să fie negativ definită. În general această condiție nu este și suficientă, după cum arată exemplul de mai jos al lui Nagata. Totuși, dacă ne situăm în categoria mai largă a spațiilor algebrice de dimensiune 2, această condiție este și suficientă (a se vedea M. Artin [3]). Altfel spus, dacă matricea $\|(E_i \cdot E_j)\|_{i,j}$ este negativ definită, există un morfism birațional $f : X \to Y$ cu Y spațiu algebric normal (de dimensiune 2) astfel încît $f(E)$ este un punct pe Y, iar restricția lui f la $X - E$ este un izomorfism pe $Y - f(E)$.

(3.1) *Exemplu.* (Nagata). Fie $k = \mathbb{C}$ corpul numerelor complexe, E_0 o curbă nesingulară de grad trei în $X_0 = P^2$ și fie $0 \in E_0$ un punct de inflexiune (adică un punct cu proprietatea că tangenta în 0 la E_0 nu mai intersectează pe E_0 în alt punct), de exemplu curba E_0 dată de ecuația

$$x_1^2 x_2 - x_0^3 + x_0 x_2^2 = 0$$

și punctul $0 = (0,1,0)$. După cum este bine cunoscut, E_0 admite o unică structură de grup algebric astfel încît 0 să fie elementul neutru (a se vedea de exemplu Safarevici [1], pag. 215). În plus, din descrierea geometrică a acestei structuri de grup rezultă că dacă F_0 este o altă curbă în $X_0 = P^2$ astfel încît $E_0 \cap F_0 = \{y_1, \ldots, y_m\}$,

cu precizarea că fiecare punct y_i apare de $(E_0 \cdot F_0)_{v_i}$ ori, atunci $y_1 + \ldots + y_m = 0$. Ca grup abstract, E_0 este atunci izomorf cu grupul aditiv $\mathbb{R}/\mathbb{Z} \times \mathbb{R}/\mathbb{Z}$, de unde rezultă că există un punct $x_0 \in E_0$ de ordin infinit (aici intervine esenţial faptul că ne-am restrîns la corpul complex; de exemplu, dacă k este închiderea algebrică a unui corp finit, atunci orice punct al lui E_0 are ordin finit!).

Fie X_1 suprafaţa obţinută eclatînd $X_0 = P^2$ în punctul x_0 şi fie E_1 transformata proprie a curbei E_0. Deoarece $(E_0^2) = 9$, avem $(E_1^2) = 8$. Fie $x_1 \in E_1$ unicul punct deasupra lui x_0 şi fie X_2 suprafaţa obţinută eclatînd X_1 în x_1; dacă E_2 este transformata proprie a lui E_1 şi $x_2 \in E_2$ unicul punct deasupra lui x_1, avem $(E_2^2) = 7$, şi fie X_3 suprafaţa obţinută eclatînd X_2 în punctul x_2, ş.a.m.d. obţinem suprafaţa $X = X_{10}$ şi curba eliptică $E = E_{10}$ pe X cu proprietatea că $(E^2) = -1$.

Afirmaţie: Curba E de pe X nu este contractibilă la un punct.

Dacă prin absurd ar exista un morfism $f: X \to Y$ cu proprietăţile: $f(E)$ este un punct normal pe Y şi restricţia lui f la $X-E$ este un izomorfism între $X-E$ şi $Y-y$, unde am notat prin y punctul $f(E)$, atunci ar exista în mod evident o curbă D' din Y ce nu ar trece prin y. De aici ar rezulta că ar exista o curbă D'' de pe X ce nu ar intersecta pe $E = E_{10}$. Fie atunci D curba din $X_0 = P^2$ peste care se proiectează D''. Cum D'' nu taie pe E, atunci D nu taie pe E_0 în nici-un punct diferit de punctul x_0. Fie atunci $m = (D \cdot E_0) = (D \cdot E_0)_{x_0}$. Din cele spuse mai sus rezultă că $m \cdot x_0 = 0$, ceea ce contrazice faptul că x_0 este un punct de ordin infinit pe curba eliptică E_0. Q.E.D.

(3.2) În continuare ne propunem să dăm criterii suficiente de contractibilitate în categoria suprafeţelor algebrice, criterii ce vor fi folosite în mod esenţial mai tîrziu.

Fie deci X o suprafaţă (peste un corp algebric închis de caracteristică arbitrară) şi $E = E_1 \cup \ldots \cup E_n$ o curbă conexă pe X de componente integre $E_1, \ldots, E_n$ (distincte două cîte două) şi fie $Z = \sum_{i=1}^{n} r_i E_i$, cu $r_i \geq 0$, un divizor efectiv de suport conţinut în E.

(3.3) LEMĂ. *În situaţia descrisă la (3.2), următoarele afirmaţii sînt echivalente:*

a) $H^1(O_Z) = 0$.

b) *Pentru orice divizor $0 < Z' \leq Z$ avem $p_a(Z') \leq 0$.*

Demonstraţie. Genul aritmetic al lui Z' este dat de una din formulele:

$$p(Z') = 1/2\,(Z' + K \cdot Z') + 1 = 1 - \chi(O_{Z'}),$$

unde K este un divizor canonic pe X.

a) $\Rightarrow$ b) : Omomorfismul surjectiv $O_Z \to O_{Z'}$, induce, ţinînd cont că Z este curbă, surjecţia $H^1(O_Z) \to H^1(O_{Z'})$, deci $H^1(O_{Z'}) = 0$. Cum însă $p_a(Z') = 1 - \dim H^0(O_{Z'}) + \dim H^1(O_{Z'}) = 1 - \dim H^0(O_{Z'}) \leqslant 0$, obţinem concluzia.

b) $\Rightarrow$ a) : Din ipotezele lui b) rezultă în particular că $p_a(E_i) = 0$ pentru orice i cu proprietatea că E_i intră în componenţa lui Z, şi deci E_i este curbă nesingulară raţională. Vom demonstra implicaţia b) $\Rightarrow$ a) prin inducţie după $\sum_{i=1}^{n} r_i$, observînd că am probat deja afirmaţia în cazul $\sum_{i=1}^{n} r_i = 1$. Presupunem deci $\sum_{i=1}^{n} r_i > 1$ şi lema adevărată pentru $\sum_{i=1}^{n} r_i - 1 \geqslant 1$. Putem presupune $r_1 > 0$. Deoarece implicaţia este adevărată pentru $Z_1 = Z - E_1$, avem $H^1(O_{Z_1}) = 0$. Însă surjecţia $O_Z \to O_{Z_1}$ de nucleu idealul $I_{Z_1,Z} = O_X(-Z_1)/O_X(-Z) = O_X(-Z_1) \otimes O_{E_1}$ (deci $\deg_{E_1}(I_{Z_1,Z}) = -(Z_1 \cdot E_1)$) induce omomorfismul surjectiv

$$H^1(I_{Z_1,Z}) \to H^1(O_Z) \to H^1(O_{Z_1}) = 0.$$

Dacă arătăm că există o componentă E_1 în Z cu proprietatea $(-Z_1 \cdot E_1) \geqslant -1$, atunci ţinînd cont că E_1 este o dreaptă proiectivă, va rezulta $H^1(I_{Z_1,Z}) = 0$, şi prin urmare $H^1(O_Z) = 0$. Inegalitatea $-(Z_1 \cdot E_1) \geqslant -1$ este echivalentă cu $(Z \cdot E_1) \leqslant 1 + (E_1^2)$. Dacă prin absurd am avea $(Z \cdot E_i) \geqslant 2 + (E_i^2)$ pentru orice componentă E_i din Z, atunci din $p_a(E_i) = 0$ am deduce $(K \cdot E_i) = -2-(E_i^2)$ şi prin urmare $p_a(Z) = 1/2(Z + K \cdot Z) + 1 = 1/2(Z + K \cdot \sum_{i=1}^{n} r_i E_i) + 1 = 1/2 \sum_{i=1}^{n} r_i (Z + K \cdot E_i) + 1 \geqslant 1/2 \sum_{i=1}^{n} r_i [2 + (E_i^2) - 2 - (E_i^2)] + 1 = 1$, adică $p_a(Z) \geqslant 1$, ceea ce contrazice pe b). Q.E.D.

(3.4) LEMĂ. *În ipotezele şi notaţiile lemei* (3.3), *condiţiile* a) *sau* b) *sînt de asemenea echivalente cu oricare din următoarele două condiţii :*

c) *Omomorfismul canonic* $d : H^1(O_Z^*) \to \mathbb{Z}^n$ *care asociază fiecărui* O_Z*-modul inversibil* L n*-uplul* $(\deg_{E_1}(L/E_1), \ldots, \deg_{E_n}(L/E_n))$ *este un izomorfism dacă* $E_1, \ldots, E_n$ *sînt toate componentele lui* Z.

c') *Omomorfismul* d *de la* c) *are nucleul finit.*

(3.5) *Observaţie.* Deoarece în paragrafele următoare vom utiliza în mod intensiv teoria schemei Picard pentru curbe şi suprafeţe, observăm că în contextul acestei teorii lema (3.4) rezultă imediat în felul următor : Deoarece Z este curbă, componenta conexă $\underline{Pic}^\circ(Z)$

a originii din schema lui Picard Pic (Z) este redusă, şi cum $\text{Pic}^\circ(Z)$ este o schemă în grupuri comutative, rezultă că $\text{Pic}^\circ(Z)$ este un grup algebric comutativ. În plus, spaţiul tangent în origine la $\text{Pic}^\circ(Z)$ se identifică în mod canonic cu $H^1(O_Z)$, deci condiţia a) din (3.3) înseamnă exact că $\text{Pic}^\circ(Z) = 0$, adică exact condiţia c') Cu toate acestea vom demonstra şi direct (după M. Artin [1]) această lemă cheie.

Demonstraţia lemei (3.4). Fie $Z = \sum_{i=1}^{n} r_i E_i$ cu $r_i \geqslant 1$. Fie $E = Z_{\text{red}} = \sum_{i=1}^{n} E_i$. Avem şirul exact

$$0 \to I \to O_Z \to O_E \to 0$$

în care idealul I este nilpotent. Obţinem şirul exact de fascicule de grupuri multiplicative:

$$1 \to J \to O_Z^* \to O_E^* \to 1.$$

Deoarece Z este curbă şi omomorfismele $H^0(O_Z) \to H^0(O_E)$ şi $H^0(O_Z^*) \to H^0(O_E^*)$ sînt surjective (E fiind conexă şi redusă, avem $H^0(O_E) = k$ şi $H^0(O_E^*) = k^*$), obţinem şirurile exacte

$$0 \to H^1(I) \to H^1(O_Z) \to H^1(O_E) \to 0,$$

$$1 \to H^1(J) \to H^1(O_Z^*) \to H^1(O_E^*) \to 1.$$

Dacă în plus $I^2 = 0$, atunci I este izomorf cu J prin aplicaţia $x \mapsto 1 + x$, şi deci $H^1(I) \cong H^1(J)$. Dacă I^2 nu este nul, există în orice caz un întreg $t > 0$ astfel încît $I^t = 0$ (deoarece $Z_{\text{red}} = E$). Fie Z_r subschema închisă a lui Z de ideal I^r, $1 \leqslant r \leqslant t$. Presupunem că $r < t$. Atunci avem diagrama comutativă cu liniile şi coloanele exacte:

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & 0 & & 0 & & & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & & & \\
 & & I^r & = & I^r & & & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & & & \\
0 & \longrightarrow & I_{r+1} = I/I^{r+1} & \longrightarrow & O_{Z_{r+1}} & \longrightarrow & O_E & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \| & & \\
0 & \longrightarrow & I_r = I/I^r & \longrightarrow & O_{Z_r} & \longrightarrow & O_E & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & & & \\
 & & 0 & & 0 & & & &
\end{array}$$

în care $I'^2 = 0$. În mod asemănător avem şi diagrama comutativă cu liniile şi coloanele exacte:

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & 0 & & 0 & & & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & & & \\
 & & J' & = & J' & & & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & & & \\
0 & \longrightarrow & J_{r+1} & \longrightarrow & O^*_{Z_{r+1}} & \longrightarrow & O^*_E & \longrightarrow & 1 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \| & & \\
0 & \longrightarrow & J_r & \longrightarrow & O^*_{Z_r} & \longrightarrow & O^*_E & \longrightarrow & 1 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & & & \\
 & & 1 & & 1 & & & &
\end{array}$$

Deoarece $I'^2 = 0$ avem izomorfismul $\varepsilon : I' \tilde{\to} J'$, $\varepsilon : x \mapsto 1 + x$, deci diagrama cu liniile exacte:

$$\begin{array}{ccccccccc}
H^0(I_r) & \xrightarrow{\delta} & H^1(I') & \longrightarrow & H^1(I_{r+1}) & \longrightarrow & H^1(I_r) & \longrightarrow & 0 \\
\downarrow{\scriptstyle \varepsilon'} & & \downarrow{\scriptstyle \varepsilon} \wr & & & & & & \\
H^0(J_r) & \xrightarrow{\delta'} & H^1(J') & \longrightarrow & H^1(J_{r+1}) & \longrightarrow & H^1(J_r) & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

în care ε' este bijecţia $u \mapsto 1 + u$ (care, dacă $I_r^2 \neq 0$, nu este neapărat omomorfism de grupuri). Totuşi, dacă arătăm că pătratul din această diagramă este comutativ, atunci rezultă că omomorfismul ε induce izomorfismul de grupuri $\bar{\varepsilon}$: Coker $(\delta) \tilde{\to}$ Coker (δ'), şi prin urmare rezultă (prin inducţie după r) că am demonstrat:

(3.4.1) Dacă $I^t = 0$, există un şir de subgrupuri

$$H^1(I) = I'_0 \supseteq I'_1 \supseteq \ldots \supseteq I'_t = 0,$$
$$H^1(J) = J'_0 \supseteq J'_1 \supseteq \ldots \supseteq J'_t = 0,$$

şi izomorfismele $I'_r/I'_{r+1} \cong J'_r/J'_{r+1}$, $r = 0, 1, \ldots, t-1$.

Trebuie deci verificată comutativitatea pătratului din diagrama de mai sus. Fie pentru aceasta $u \in H^0(I_r)$ un element arbitrar şi

$\{U_i\}$ o acoperire deschisă şi finită a lui E şi secţiunile $u_i \in \Gamma(U_i, I_{r+1})$ astfel încît $u_i/Z_r = u$. Atunci $u_i - u_j$ pune în evidenţă un 1-cociclu ce reprezintă pe $\delta(u)$, deci $\varepsilon\delta(u)$ este clasa cociclului $\{1 + u_i - u_j\}_{i,j}$. Pe de altă parte, $\varepsilon'(u) = 1 + u$ poate fi ridicată pe fiecare U_i la secţiunea $1 + u_i \in \Gamma(U_i, J_{r+1})$, deci $\delta'\varepsilon'(u)$ este reprezentat de cociclul $\{(1 + u_i)/(1 + u_j)\}_{i,j}$. Însă deoarece $u_i - u_j \in \Gamma(U_i \cap U_j, I')$ şi $I' \cdot I_{r+1} = 0$, avem $(u_i - u_j) \cdot u_j = 0$, de unde $(1 + u_j) \cdot (1 + u_i - u_j) = 1 + u_i$, sau încă $(1 + u_i)/(1 + u_j) = 1 + u_i - u_j$.

(3.4.1) ne reduce acum la considerarea cazului particular $Z = E = \sum_{i=1}^{n} E_i$. Fie atunci $\overline{E} = \coprod_i E_i$ suma topologică disjunctă a curbelor E_i şi $\pi : \overline{E} \to E$ morfismul canonic. Atunci π este morfism finit şi izomorfism în afara unui număr finit de puncte. Avem $\overline{E} = \operatorname{Spec} \prod_{i=1}^{n} O_{E_i}$ deoarece $\pi_* O_{\overline{E}} = \prod_{i=1}^{n} O_{E_i}$. Deoarece E este redusă, aplicaţiile canonice $O_E \to \prod_i O_{E_i}$ şi $O_E^* \to (\prod_i O_{E_i})^* = \prod_{i=1}^{n} O_{E_i}^*$ sînt injective, de conuclee coerente şi concentrate într-un număr finit de puncte. Deoarece $\pi_* O_{\overline{E}} = \prod_i O_{E_i}$ şi $\pi_* O_{\overline{E}}^* = \prod_i O_{E_i}^*$ rezultă aplicaţiile surjective

$$H^1(O_E) \to H^1(O_{\overline{E}}) \text{ şi } H^1(O_E^*) \to H^1(O_{\overline{E}}^*),$$

cărora dorim să le comparăm nucleele.

În acest scop descompunem morfismul canonic π în $\overline{E} \to E' \to E$, unde $O_{E'}$ este O_E-subalgebra lui $\prod_i O_{E_i}$ ale cărei secţiuni sînt sisteme $f = (f_1, \ldots, f_n) \in \Gamma(U, \prod_i O_{E_i})$, cu U deschis în E, astfel încît $f_i(P) = f_j(P)$ dacă $P \in E_i \cap E_j \cap U$. Din definiţia lui E' rezultă şirul exact:

$$0 \to O_{E'} \to \prod_i O_{E_i} \to F \to 0 \tag{3.4.2}$$

în care dacă $P \in E$, atunci F_P este suma directă de $n_P - 1$ exemplare de spaţii vectoriale egale cu k, unde n_P este numărul componentelor E_i ce trec prin P (deci $F_P = 0$ dacă $n_P = 1$). Deoarece $H^1(F) = 0$ din (3.4.2) rezultă că nucleul aplicaţiei surjective $H^1(O_{E'}) \to H^1(O_E)$ este un k-spaţiu vectorial de dimensiune $N = \sum_P (n_P - 1) - n + 1$.

În mod cu totul şi cu totul analog, considerînd şirul exact

$$(3.4.3) \qquad 1 \to O^*_{E'} \to \prod_i O^*_{E_i} \to G \to 1$$

rezultă că aplicaţia $H^1(O^*_{E'}) \to H^1(O^*_E)$ este surjectivă, iar nucleul său este izomorf cu suma directă a N exemplare izomorfe cu grupul multiplicativ k^*.

Toate aceste consideraţii ne reduc la considerarea aplicaţiilor injective $\lambda : O_E \to O_{E'}$ şi $\lambda^* : O^*_E \to O^*_{E'}$ de conuclee din nou concentrate într-un număr finit de puncte. (Notăm că morfismul $E' \to E$ este bijectiv.) Deoarece $H^0(O_E) = H^0(O_{E'}) = k$, deducem că $\mathrm{Ker}(H^1(O_E) \xrightarrow{\bar{\lambda}} H^1(O_{E'}))$ este suma directă a grupurilor aditive $O_{E',P}/O_{E,P}$ cînd $P \in E$. Asemănător, $\mathrm{Ker}\,(H^1(O^*_E) \xrightarrow{\bar{\lambda}^*} H^1(O^*_{E'}))$ este suma directă a grupurilor multiplicative $O^*_{E',P}/O^*_{E,P}$ cînd $P \in E$. În plus, $\bar{\lambda}$ şi $\bar{\lambda}^*$ sînt aplicaţii surjective.

Avînd în vedere (3.4.1) şi concluziile deduse din şirurile exacte (3.4.2) şi (3.4.3), demonstraţia lemei (3.4) se încheie imediat dacă demonstrăm :

(3.4.4) Există un întreg $p \geq 0$, subinelele $O_{E',P} = A_0 \supseteq A_1 \supseteq \supseteq \ldots \supseteq A_p = O_{E,P}$ şi izomorfismele de grupuri $A_r/A_{r+1} \cong A^*_r/A^*_{r+1}$, $r = 0, 1, \ldots, p-1$.

Demonstraţia lui (3.4.4). Dacă $n_P = 1$, luăm $p = 0$. În caz contrar fie $A' = O_{E',P}$ şi $A = O_{E,P}$ de ideale maximale m' şi m respectiv. Deoarece $\dim_k(A'/A) < \infty$, conductorul lui A' în A este un ideal m-primar (vezi Serre [3], chap. IV). Există deci un $p \geq 0$ astfel încît $m'^{p+1} \subseteq m$. Punînd $A_r = A + m'^{r+1}$, $r = 0, 1, \ldots, p$, avem că A_r este un inel local de ideal maximal m_r, $A_p = A$, $A_0 = A'$ şi $m_r^2 \subseteq m_{r+1}$, $r = 0, 1, \ldots, p-1$. De asemenea este clar că avem izomorfismele $m_r / m_{r+1} \cong A_r/A_{r+1}$, $r = 0, 1, \ldots, p-1$. Fie $m^*_r = 1 + m^2_r$. Avem de asemenea $m^*_r/m^*_{r+1} \cong A^*_r/A^*_{r+1}$, $r = 0, 1, \ldots, p-1$. Definind aplicaţia $\varphi : m_r \to m^*_r/m^*_{r+1}$ prin $\varphi(x) = 1 + x \bmod m^*_{r+1}$ şi observînd că

$$(1 + x)(1 + y)/(1 + x + y) = 1 + (xy/(1 + x + y)) \text{ şi}$$

$$xy/(1 + x + y) \in m^2_r \subseteq m_{r+1},$$

rezultă că φ este omomorfism de grupuri. Este clar că φ este surjectiv şi $\mathrm{Ker}(\varphi) = m_{r+1}$, de unde izomorfismul $m_r/m_{r+1} \cong m^*_r/m^*_{r+1}$, ceea ce încheie demonstraţia lui (3.4.4).

Din discuţia de mai sus rezultă că aplicaţia surjectivă $H^1(O_Z) \to \to \prod_{i=1}^{n} H^1(O_{E_i})$ este un izomorfism dacă şi numai dacă aplicaţia surjectivă $H^1(O_Z^*) \to \prod_{i=1}^{n} H^1(O_{E_i}^*)$ este un izomorfism. Combinînd această concluzie cu observaţia că $H^1(O_{E_i}) = 0$ dacă şi numai dacă aplicaţia $\deg: H^1(O_{E_i}^*) \to \mathbb{Z}$ este un izomorfism, sau încă, dacă şi numai dacă E_i este izomorfă cu dreapta proiectivă, demonstraţia lemei (3.4) este completă. Q.E.D.

(3.6) Corolar. *În ipotezele lui (3.3), presupunem în plus că $H^1(O_Z) = 0$. Atunci orice O_Z-modul inversibil L astfel încît $\forall i$, $d_i = \deg_{E_i}(L) \geqslant 0$, este generat de secţiunile sale globale şi $H^1(L) = 0$.*

Demonstraţie. Fie $x_i, y_i \in E_i$ două puncte distincte pe curba raţională nesingulară E_i, care nu se află pe $\bigcup_{j \neq i} E_j$, $i = 1, \ldots, n$. Fie f_i (resp. g_i) un uniformizant local pe E în punctul nesingular x_i (resp. y_i), adică un generator al idealului maximal al inelului local O_{E, x_i} (resp. O_{E, y_i}). Fie $\bar{f}_i \in O_{Z, x_i}$ (resp. $\bar{g}_i \in O_{Z, y_i}$) cîte o preimagine a lui f_i (resp. a lui g_i) via omomorfismul surjectiv de nucleu nilpotent $O_{Z, x_i} \to \to O_{E, x_i}$ (resp. $O_{Z, y_i} \to O_{E, y_i}$). Fie de asemenea U_i (resp. V_i) un deschis din $E_i - \bigcup_{j \neq i} E_j$ care conţine pe x_i (resp. pe y_i), şi în care funcţia f_i este regulată (resp. g_i este regulată) şi astfel încît f_i (resp. g_i) nu mai are alte zerouri afară de x_i (resp. de y_i). Este clar atunci că

$$\{(U_1, \bar{f}_1^{d_1}), \ldots, (U_n, \bar{f}_n^{d_n}), (Z - \{x_1, \ldots, x_n\}, 1)\}$$

$$\{(V_1, \bar{g}_1^{d_1}), \ldots, (V_n, \bar{g}_n^{d_n}), (Z - \{y_1, \ldots, y_n\}, 1)\}$$

definesc doi divizori Cartier D şi D' respectiv, a căror restricţie la E sînt divizorii $\sum_i d_i x_i$ şi $\sum_i d_i y_i$ respectiv. În plus, $\deg_{E_i} O_Z(D) = d_i = \deg_{E_i} O_Z(D')$. După lema (3.4) rezultă că $L \cong O_Z(D) \cong O_Z(D')$. De aici rezultă în mod banal că L este generat de secţiunile sale globale (anume, pentru fiecare punct $z \in Z$ unul din divizorii D sau D' nu trece prin z). Dacă L este generat de secţiunile sale globale există o surjecţie $O_Z^{\oplus s} \to L \to 0$, care induce omomorfismul surjectiv $H^1(O_Z^{\oplus s}) \to H^1(L) \to 0$, şi a doua afirmaţie rezultă deoarece $H^1(O_Z) = 0$ prin ipoteză. Q.E.D.

(3.7) COROLAR. *În ipotezele lui (3.6), dacă* $Z = \sum_{i=1}^{n} r_i E_i$, $r_i \geqslant 1$, *atunci*

$$\dim H^0(L) = \sum_{i=1}^{n} r_i d_i + \dim H^0(O_Z).$$

Demonstrație. Ținînd cont de definiția numărului de intersecție $(L)_Z = \deg_Z(L)$, avem $\chi(L) = \deg_Z(L) + \chi(O_Z)$, deci (3.6) implică

$$\dim H^0(L) = \deg_Z(L) + \dim H^0(O_Z).$$

În fine faptul că $\deg_Z(L) = \sum_{i=1}^{n} r_i d_i$ rezultă din (1.11) și (1.12). Q.E.D.

Înainte de a demonstra criteriul de contractibilitate „rațională" al lui M. Artin avem nevoie de:

(3.8). LEMĂ. *Fie* $f: X \to Y$ *un morfism de la suprafața* X *la suprafața normală (și proiectivă)* Y *astfel încît există un punct închis* $y \in Y$ *cu proprietățile:* f *este izomorfism între* $X - f^{-1}(y)$ *și* $Y - y$ *și* $f^{-1}(y)$ *este o curbă de componente integre* $E_1, \ldots, E_n$ *(un astfel de morfism* f *va fi numit în continuare contracție a lui* X *de-a lungul curbei* $E = E_1 + \ldots + E_n$*). Următoarele afirmații sînt echivalente:*

a) $R^1 f_*(O_X) = 0$.

b) $\chi(O_X) = \chi(O_Y)$.

c) $p_a(Z) \leqslant 0$ *pentru orice divizor pozitiv* Z *de suport conținut în* E.

d) $H^1(O_Z) = 0$ *pentru orice* Z *ca în condiția* c).

e) *Pentru orice* $Z > 0$ *de suport egal cu* E, *omomorfismul canonic din* (3.4) *este un izomorfism.*

Demonstrație. Echivalența dintre c), d) și e) a fost demonstrată la (3.3) și (3.4). Rămîne deci de dovedit echivalența dintre a), b) și c). În acest sens, șirul spectral Leray al morfismului f pune în evidență șirul exact (ținînd cont că $f_* O_X = O_Y$ și $R^q f_* O_X = 0$ pentru $q \geqslant 2$):

$$0 \to H^1(O_Y) \to H^1(O_X) \to H^0(R^1 f_* O_X) \to H^2(O_Y) \to H^2(O_X) \to 0,$$

de unde

$$\text{(3.8.1)} \qquad \chi(O_Y) - \chi(O_X) = \dim H^0(R^1 f_* O_X) = \dim(R^1 f_* O_X)_y.$$

(Deoarece f este izomorfism în afara lui y, $R^1 f_* O_X$ este concentrat în punctul y.) Atunci (3.8.1) probează în general inegalitatea $\chi(O_Y) \geqslant \chi(O_X)$, precum și echivalența dintre a) și b).

Pe de altă parte, teorema lui Zariski a funcţiilor olomorfe sub forma dată de Grothendieck (EGA III (4.2.1)) arată că există un izomorfism canonic

$$(R^1 f_* O_X)_y = \varprojlim_{Z_r} H^1(O_{Z_r}), \tag{3.8.2}$$

unde $Z_r = \sum_{i=1}^{n} r_i E_i$, $r_i > 0$. Ţinînd cont că $\dim (Z_r) = 1$, rezultă că dacă $r' = (r'_1, \ldots, r'_n) \geqslant r = (r_1, \ldots, r_n)$, atunci omomorfismele naturale $H^1(O_{Z_{r'}}) \to H^1(O_{Z_r})$ ale sistemului proiectiv de mai sus sînt surjective, de unde rezultă, ţinînd cont de (3.8.2), surjecţia canonică $(R^1 f_* O_X)_y \to H^1(O_{Z_r})$ pentru fiecare r. Astfel echivalenţa dintre a) şi c) este dovedită. Q.E.D.

(3.9) TEOREMĂ (M. Artin). *Fie X o suprafaţă (proiectivă şi nesingulară) şi E o curbă conexă de componente integre $E_1, \ldots, E_n$ pe X. Următoarele afirmaţii sînt echivalente:*

1) *Există un morfism $f : X \to Y$ astfel încît $f(E)$ este un punct normal y pe Y, f este izomorfism între $X - E$ şi $Y - y$, iar $\chi(O_X) = \chi(O_Y)$.*

2) *Matricea de intersecţie $\|(E_i \cdot E_j)\|_{i,j}$ este definită negativ şi pentru orice divizor pozitiv Z de suport conţinut în E, $p_a(Z) \leqslant 0$.*

În plus, dacă 1) sau 2) este îndeplinită şi dacă $f_1 : X \to Y_1$ este un alt morfism ce satisface aceleaşi condiţii ca şi f, atunci există un unic izomorfism $u : Y \xrightarrow{\sim} Y_1$ astfel încît $u \circ f = f_1$, iar suprafaţa Y este de asemenea proiectivă.

Demonstraţie. Existenţa izomorfismului u decurge dintr-o afirmaţie simplă şi generală şi este lăsată pe seama cititorului.

Implicaţia 1) $\Rightarrow$ 2) rezultă din (3.8) şi (2.7).

2) $\Rightarrow$ 1). Dacă dovedim existenţa lui $f : X \to Y$ cu proprietatea că f este contracţie a lui X de-a lungul lui E, atunci faptul că $\chi(O_X) = \chi(O_Y)$, este o consecinţă a lui (3.8).

Fie G grupul abelian liber de bază $E_1, \ldots, E_n$. Pentru orice divizor $D \in \mathrm{Div}(X)$ obţinem omomorfismul $i_D \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(G, \mathbb{Z})$ definit astfel: dacă $z \in G$, atunci $i_D(Z) = (Z \cdot D)$. În particular, obţinem omomorfismul $i : G \to \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(G, \mathbb{Z})$, $i : D \mapsto i_D$, care este injectiv deoarece matricea lui i în baza $E_1, \ldots, E_n$ pentru G şi baza duală $E_1^*, \ldots, E_n^*$ pentru $G^* = \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(G, \mathbb{Z})$ este exact matricea de intersecţie $\|(E_i \cdot E_j)\|$, care este prin ipoteză definită negativ. Cum G şi G^* au acelaşi rang, Coker (i) este un grup finit. Rezultă că pentru orice divizor $D \in \mathrm{Div}(X)$ există un $m = m_D \geqslant 1$ astfel încît $m \cdot i_D = i_{mD} = - i_Z$ cu $Z \in G$ convenabil.

Fie acum H o secţiune hiperplană pe X astfel încît $H^q(O_X(H)) = 0$ pentru orice $q \geqslant 1$. Înlocuind pe H cu un multiplu convenabil

al său, putem presupune în plus că $i_H = -i_Z$ (conform celor spuse mai sus), cu $Z \in G$. Deoarece $(H \cdot E_i) > 0$, $i = 1, \ldots, n$, rezultă $(Z \cdot E_i) < 0$ pentru orice i. Atunci Z rezultă un divizor strict pozitiv ce majorează pe $E = E_1 + \ldots + E_n$. Într-adevăr, punînd $Z = Z_1 - Z_2$, cu Z_1, $Z_2 \geqslant 0$ şi fără componente comune, obţinem $0 \geqslant (Z \cdot Z_2) = (Z_1 \cdot Z_2) - (Z_2^2)$. Cum $(Z_1 \cdot Z_2) \geqslant 0$ şi $-(Z_2^2) \geqslant 0$, rezultă $(Z_2^2) = 0$, deci $Z_2 = 0$ deoarece matricea $\|(E_i \cdot E_j)\|$ este definită negativ, deci $Z \geqslant 0$. Deoarece $(Z \cdot E_i) < 0$, Z trebuie să conţină pe E_i drept componentă, deci $Z \geqslant E_i$.

Avem atunci $i_{H+Z} = 0$, adică $(H + Z \cdot E_i) = 0$ pentru orice i. Punînd $L = O_X(H + Z) \otimes O_Z$, obţinem un O_Z-modul inversibil cu proprietatea $\deg_{E_i}(L/E_i) = (L \cdot E_i) = 0$ pentru orice i, deci din (3.3) şi (3.4) rezultă $L \cong O_Z$ (acesta este punctul cheie al demonstraţiei!). Obţinem şirul exact

$$0 \to O_X(H) \to O_X(H + Z) \to O_Z \to 0$$

care arată, ţinînd cont că $H^1(O_X(H)) = 0$, surjectivitatea omomorfismului canonic de restricţie $H^0(O_X(H + Z)) \to H^0(O_Z)$. Există deci o secţiune $s \in H^0(O_X(H + Z))$ a cărei restricţie la Z este 1, deci un divizor $D \in |H + Z|$ cu proprietatea $D \cap E = \emptyset$. Deoarece H este o secţiune hiperplană rezultă: a) sistemul linear complet $|H + Z|$ nu are nici puncte bază nici componente fixe, b) $|H + Z|$ separă punctele şi direcţiile din $X - E$. În plus, faptul că $(H + Z \cdot E_i) = 0$ pentru orice i implică că morfismul $f' : X \to P(H^0(O_X(H + Z))) = |H + Z|$ contractă curba E la un punct $f'(E) = y'$, iar pe de altă parte, f' este izomorfism între $X - E$ şi $f'(X) - y'$. Înlocuind eventual $f'(X)$ cu normalizata sa Y (care este varietate proiectivă deoarece $f'(X)$ are această proprietate) şi f' cu morfismul $f : X \to Y$ dedus din proprietatea de universalitate a normalizatei, obţinem contracţia dorită. Q.E.D.

(3.10) Corolar. *Fie X o suprafaţă şi E o curbă conexă ce satisface condiţia* 2) *din* (3.9). *Fie D un divizor pe X astfel încît $(D \cdot E_i) = 0$ pentru orice $i = 1, \ldots, n$. Atunci există un divizor D_1 linear echivalent cu D astfel încît* Supp $(D_1) \cap E = \emptyset$.

Demonstraţie. Punîndu-ne de acord cu notaţiile din demonstraţia lui (3.9), fie H o secţiune hiperplană astfel încît $H^q(O_X(H)) = H^q(O_X(H + D)) = 0$ pentru orice $q \geqslant 1$, $i_H = -i_Z$, cu $Z \geqslant E$ un divizor din G. Din ipoteze rezultă de asemenea $i_{H+D} = -i_Z$. La fel ca în demonstraţia lui (3.9) deducem existenţa a doi divizori $D' \in |H + Z|$ şi $D'' \in |H + Z + D|$ astfel încît $D' \cap E = D'' \cap E = \emptyset$. Punînd $D_1 = D'' - D'$, avem $D_1 \sim D$ şi Supp $(D_1) \cap E = \emptyset$. Q.E.D.

(3.11) Facem acum o mică digresiune pentru a aminti pe scurt definiţia şi proprietăţile mai importante ale fasciculului dualizant

ω_Z al lui Grothendieck asociat unei k-scheme algebrice Z de dimensiune pură $n \geqslant 1$. Pentru detalii se poate consulta Altman-Kleiman [1]. Pentru aceasta se scufundă Z într-o varietate nesingulară P de dimensiune să zicem $m \geqslant n$ ca subschemă închisă, şi atunci punem prin definiţie

$$\omega_Z = \mathscr{E}xt^{m-n}_{O_P}(O_Z, \Omega^m_{P/k}),$$

unde $\Omega^m_{P/k}$ este fasciculul de germeni de forme diferenţiale de grad m pe P. Iată o listă de proprietăţi ale lui ω_Z ce vor fi folosite în continuare:

(3.11.1) ω_Z este un O_Z-modul coerent ce depinde doar de Z, nu şi de scufundarea $Z \subset P$.

(3.11.2) ω_Z coincide în jurul punctelor nesingulare ale lui Z cu fasciculul $\Omega^n_{Z/k}$.

(3.11.3) Dacă Z este o schemă proiectivă şi Cohen-Macaulay, atunci pentru orice O_Z-modul F local liber de rang finit, există o acuplare nesingulară

$$H^p(Z, F) \times H^{n-p}(Z, \check{F} \otimes \omega_Z) \to k,$$

cu $\check{F}$ dualul lui F, ce pune în dualitate algebrică spaţiile vectoriale de mai sus (dualitatea Grothendieck-Serre).

(3.11.4) Dacă Z este Cohen-Macaulay, atunci ω_Z este un fascicul inversibil în jurul punctului $z \in Z$ dacă şi numai dacă inelul local $O_{Z,z}$ este inel Gorenstein.

(3.11.5) Dacă D este un divizor Cartier efectiv pe Z, atunci are loc formula de adjuncţie:

$$\omega_D \cong \omega_Z \otimes O_Z(D) \otimes O_D.$$

În particular, dacă Z este o suprafaţă normală şi proiectivă, Z este totdeauna Cohen-Macaulay şi deci ω_Z are toate proprietăţile de mai sus.

(3.12) LEMĂ. *Fie A un inel local noetherian de dimensiune n, cît al inelului local regulat B de dimensiune $n + r$, şi fie I un ideal al lui A ($I \neq A$) astfel încît I-prof $(A) \geqslant 2$ (adică I conţine un A-şir f_1, f_2 de lungime 2). Dacă punem $\Omega_A = \mathrm{Ext}^r_B(A, B)$, atunci I-prof$(\Omega_A) \geqslant 2$.*

Demonstrație. Fie $f_1, f_2 \in I$ un A-șir. Vom arăta că f_1, f_2 este de asemenea un Ω_A-șir. Fie pentru aceasta șirul exact

$$0 \to A \xrightarrow{f_1} A \to A/f_1A \to 0.$$

în care prima săgeată este multiplicarea cu f_1. Obținem șirul exact al Ext'urilor :

$$\mathrm{Ext}^r_B(A/f_1A,\ B) \to \Omega_A \xrightarrow{f_1} \Omega_A \to \mathrm{Ext}^{r+1}_B(A/f_1A,\ B) = \Omega_{A/f_1A}.$$

Deoarece $r < \dim(B) - \dim(A/f_1A) = r+1$, $\mathrm{Ext}^r_B(A/f_1A, B)=0$ (a se vedea de exemplu Altman-Kleiman [1], pag. 50), de unde rezultă că f_1 nu este divizor al lui zero în Ω_A, și în plus, $\Omega_A/f_1\Omega_A$ este un A-submodul al lui Ω_{A/f_1A}. Deoarece f_2 nu este divizor al lui zero în A/f_1A, același argument arată că f_2 nu este divizor al lui zero în Ω_{A/f_1A}, și *a fortiori*, în submodulul $\Omega_A/f_1\Omega_A$. Q.E.D.

(3.13) COROLAR. *Fie A un inel local Cohen-Macaulay de dimensiune n, cît al inelului local regulat B de dimensiune $n+r$, și fie I un ideal al lui A ($I \neq A$), astfel încît I-prof $(A) \geqslant 2$ (de exemplu A normal, de dimensiune $\geqslant 2$ și I idealul maximal al lui A). Punînd $X = \mathrm{Spec}\,(A)$, $Y = V(I)$, $U = X - Y$ și $\omega_X = (\mathrm{Ext}^r_B(A, B))^\sim$, următoarele condiții sînt echivalente :*

i) A este inel Gorenstein.

ii) $\omega_X/U \cong O_X/U$.

Demonstrație. Dacă A este inel Gorenstein, $\Omega_A \cong A$, deci $\omega_X \cong O_X$ și deci condiția *ii*). Reciproc, presupunînd *ii*), avem, după (3.12), că I-prof $(\Omega_A) \geqslant 2$, deci fasciculele $\mathscr{H}^0_Y(\omega_X)$ și $\mathscr{H}^1_Y(\omega_X)$ de coomologie locală se anulează (cf. Grothendieck [4], teorema 3.8). Însă aceste două fascicule reprezintă nucleul și conucleul aplicației canonice $\omega_X \to i_*(\omega_X/U)$, deci $\omega_X \cong i_*(\omega_X/U) \cong i_*(O_X/U) \cong O_X$, deoarece I-prof $(A) \geqslant 2$ prin ipoteză, unde prin i am notat imersia $U \hookrightarrow X$. Q.E.D.

(3.14) COROLAR. (Murthy). *Fie A un inel local Cohen-Macaulay, factorial și care este cît de inel local regulat. Atunci A este inel Gorenstein.*

Demonstrație. Dacă $\dim(A) = 0$, afirmația este banală, iar dacă $\dim(A) = 1$, A factorial, implică A de valuare discretă, deci Gorenstein. Presupunem deci $\dim(A) \geqslant 2$ și vom demonstra (3.14) prin inducție după $\dim(A)$. Punînd $U = X - \{m\}$, unde $X = \mathrm{Spec}(A)$ și m este idealul maximal al lui A, atunci orice O_U-modul inversibil este liber. Într-adevăr, fiecare astfel de O_U-modul se poate

extinde, ţinînd cont de factorialitatea lui A, la un O_X-modul inversibil, care este liber deoarece A este inel local. Deoarece dim $(U) <$ $<$ dim (A), putem presupune prin ipoteza de inducţie că U este o schemă Gorenstein, deci ω_X/U este inversibil, şi deci liber după afirmaţia precedentă. (3.14) rezultă acum din (3.13). Q.E.D.

Cu aceste pregătiri trecem acum la demonstrarea următorului caz special remarcabil al teoremei (3.9):

(3.15) TEOREMĂ. (M. Artin). *Fie X o suprafaţă (proiectivă şi nesingulară) şi E o curbă conexă de componente integre $E_1, \ldots, E_n$. Următoarele afirmaţii sînt echivalente:*

1) *Există un morfism $f: X \to Y$ cu proprietăţile: $f(E) = y$ este un punct normal Gorenstein pe Y, f este izomorfism între $X - E$ şi $Y - y$ şi $f^*(\omega_Y) \cong \omega_X$.*

2) *Matricea de intersecţie $\|(E_i \cdot E_j)\|$ este definită negativ, E_i sînt curbe raţionale nesingulare şi $(E_i^2) = -2$, $\forall i = 1, \ldots, n$.*

Demonstraţie. 1) $\Rightarrow$ 2). Avem doar de arătat că $p_a(E_i) = 0$ şi $(E_i^2) = -2$. Deoarece ω_Y este inversibil şi $f^*(\omega_Y) \cong \omega_X$, avem $(\omega_X \cdot E_i) = 0$. Cum $(E_i^2) < 0$ (cf. (2.7)), din formula de adjuncţie rezultă imediat $p_a(E_i) = 0$ şi $(E_i^2) = -2$.

2) $\Rightarrow$ 1). Fie $Z > 0$ un divizor pozitiv de suport conţinut în E. Atunci $(\omega_X \cdot E_i) = -2 - (E_i^2) - 2p_a(E_i) = 0$ pentru orice i, deci $(\omega_X \cdot Z) = 0$. Rezultă că

$$p_a(Z) = 1/2(Z^2) + 1/2(\omega_X \cdot Z) + 1 = 1/2(Z^2) + 1 \leqslant 0$$

deoarece $(Z^2) < 0$, matricea de intersecţie $\|(E_i \cdot E_j)\|$ fiind definită negativ. Deci condiţia 2) a teoremei (3.9) este satisfăcută; în baza acestei teoreme există o contracţie $f: X \to Y$ cu proprietatea $\chi(O_X) = \chi(O_Y)$. Rămîne de demonstrat că ω_Y este inversibil şi că $f^*(\omega_Y) \cong \omega_X$.

Deoarece $(\omega_X \cdot E_i) = 0$ pentru orice i, există, conform lui (3.10), o formă diferenţială ω de grad doi pe X al cărei divizor, $\mathrm{div}_X(\omega)$, să aibă suportul disjunct de E. Altfel spus, există un deschis afin U pe Y ce conţine pe y astfel încît $\Omega^2_{X/k}/f^{-1}(U) \cong O_X/f^{-1}(U)$, de unde rezultă că $\Omega^2_{Y/k}/U - y \cong O_Y/U - y$. După (3.13) rezultă că y este un punct Gorenstein pe Y, deci ω_Y este inversibil. Ţinînd cont că în U avem $f^*(\omega_Y) \cong \omega_X$ şi că f este un izomorfism în afara lui y, avem $f^*(\omega_Y) \cong \omega_X$. Q.E.D.

(3.16) DEFINIŢIE. Fie (Y, y) o singularitate normală a suprafeţei algebrice Y (deci (Y, y) este singularitate izolată). Se numeşte *desingularizare* a lui (Y, y) un morfism $f: X \to Y$ astfel încît X este nesingulară în jurul lui $f^{-1}(y)$ şi f este un izomorfism între $X - f^{-1}(y)$ şi $Y - y$.

După o teoremă a lui Zariski-Abhyankar (a se vedea Zariski [4], [5] şi Abhyankar [1]), există întotdeauna o astfel de desingularizare a unei singularităţi normale de dimensiune 2 peste un corp algebric închis, de caracteristică arbitrară. Cînd dorim să studiem o asemenea singularitate (Y, y), putem evident presupune — dacă este nevoie — că Y este suprafaţă normală afină şi nesingulară în afara lui y (şi atunci desingularizata X rezultă nesingulară în orice punct).

(3.17) DEFINIŢIE. O singularitate normală (Y, y) a unei suprafeţe Y se numeşte *raţională* dacă există o desingularizare $f: X \to Y$ a lui (Y, y) astfel încît $R^1 f_* O_X = 0$.

Ţinînd cont de structura aplicaţiilor biraţionale între două suprafeţe nesingulare (ca fiind produs de transformări pătratice sau de inverse de acestea), precum şi de faptul că, dată fiind o transformare pătratică $u: X' \to X$ a suprafeţei nesingulare X, atunci $R^1 u_* O_{X'} = 0$, rezultă imediat că definiţia (3.17) este independentă de alegerea desingularizării $f: X \to Y$ în sensul că dacă $R^1 f_* O_X = 0$, atunci orice altă desingularizare a lui (Y, y) are aceeaşi proprietate.

Lema (3.8) dă condiţii echivalente cu faptul că (Y, y) este singularitate raţională, unde f este o desingularizare a lui (Y, y) şi $E = f^{-1}(y)_{red}$ este fibra redusă a lui f. Într-adevăr, dacă y nu este punct simplu pe Y, atunci din teorema de conexiune a lui Zariski (cf. EGA III 4.3.1) rezultă că E este o mulţime conexă avînd toate componentele ireductibile $E_1, \ldots, E_n$ de dimensiune 1. Corolarul (2.7) arată că matricea de intersecţie $\|(E_i \cdot E_j)\|$ este definită negativ. De aici rezultă că, pentru orice sistem $a_1, \ldots, a_n$ de numere întregi, există un unic $Z \in G$ (G fiind ca şi în demonstraţia lui (3.9) grupul abelian liber de bază $E_1, \ldots, E_n$), astfel încît $(Z \cdot E_i) = da_i$, cu $d = \det\|(E_i \cdot E_j)\|$. În particular, există divizori $Z \in G$ astfel încît $(Z \cdot E_i) \leqslant 0$ pentru orice i. Un astfel de divizor nenul este în mod necesar $\geqslant$ decît $E = E_1 + \ldots + E_n$ (a se vedea demonstraţia teoremei (3.9)).

(3.18) LEMĂ. *În ipotezele şi notaţiile de mai sus, există un cel mai mic divizor $Z > 0$, de suport egal cu E, astfel încît $(Z \cdot E_i) \leqslant 0$ pentru orice $i = 1, \ldots, n$.*

Demonstraţie. Fie $Z^1 = \sum_{i=1}^{n} r_i^1 E_i > 0$, $Z^2 = \sum_{i=1}^{n} r_i^2 E_i > 0$ astfel încît $(Z^1 \cdot E_i) \leqslant 0$, $(Z^2 \cdot E_i) \leqslant 0$ pentru orice i, şi fie $Z' = \inf(Z^1, Z^2) = \sum_{i=1}^{n} r'_i E_i$, cu $r'_i = \inf(r_i^1, r_i^2)$. Cum $r_i^1 \geqslant 1$, $r_i^2 \geqslant 1$, rezultă $r'_i \geqslant 1$. Pe

de altă parte, dacă de exemplu pentru un i $r_i^1 \leqslant r_i^2$, avem $(Z' \cdot E_i) = = r_i^1(E_i^2) + \sum_{j \neq i} r_j'(E_i \cdot E_j) \leqslant r_i^1(E_i^2) + \sum_{j \neq i} r_i^1(E_i \cdot E_j) = (Z^1 \cdot E_i) \leqslant 0$. Q.E.D.

(3.19) *Observație*. Demonstrația existenței celui mai mic $Z \geqslant E$ astfel încît $(Z \cdot E_i) \leqslant 0$ pentru orice i nu a folosit faptul că morfismul $f : X \to Y$ există, ci numai darea curbei E pe X de componente $E_1, \ldots, E_n$ avînd matricea de intersecție definită negativ.

(3.20) DEFINIȚIE. În contextul lemei (3.18), cel mai mic ciclu (pozitiv) Z cu proprietatea $(Z \cdot E_i) \leqslant 0$, $i = 1, \ldots, n$, poartă numele de *ciclul fundamental* al lui E.

(3.21) TEOREMĂ. (M. Artin). *Fie $f : X \to Y$ o desingularizare a singularității normale (Y, y) de dimensiune 2. $E = f^{-1}(y)_{\text{red}}$ și Z ciclul fundamental al lui E. Atunci $p_a(Z) \geqslant 0$ și în plus, $p_a(Z) = = 0$ dacă și numai dacă (Y, y) este singularitate rațională.*

Demonstrație. Fie $Z' > 0$ $(Z' \in G)$ cu $Z' \ngeqslant Z$. Atunci există un indice i astfel încît $(Z' \cdot E_i) > 0$ (ținînd cont de definiția lui Z). Atunci $p_a(Z' + E_i) = p_a(Z') + p_a(E_i) + (Z' \cdot E_i) - 1 \geqslant p_a(Z')$, deoarece $p_a(E_i) \geqslant 0$. Deci

(3.21.1) $$p_a(Z' + E_i) \geqslant p_a(Z') \text{ dacă } Z' \ngeqslant Z \text{ și } (Z' \cdot E_i) > 0.$$

Presupunem acum că $0 < Z' < Z$ și $(Z' \cdot E_i) > 0$. Atunci în mod necesar multiplicitatea cu care apare E_i în Z' este strict mai mică decît cea cu care apare E_i în Z, deci $Z' + E_i \leqslant Z$. Demonstrația inegalității $p_a(Z) \geqslant 0$ se face acum inductiv, observînd că $p_a(E_i) \geqslant 0$ și ținînd cont de (3.21.1).

Presupunem acum că $p_a(Z) = 0$. Fie Z_1 un divizor pozitiv din G. Definim prin inducție șirul $\{Z_m\}$ după cum urmează:

i) dacă $Z_m \geqslant Z$, atunci punem $Z_{m+1} = Z_m - Z \geqslant 0$.

ii) dacă $Z_m \ngeqslant Z$, fie i un indice astfel încît $(Z_m \cdot E_i) > 0$. Alegem pe acel i cu proprietatea că $(Z_m \cdot E_i) > 0$ și care apare cu multiplicitatea cea mai mică în Z_m și atunci punem $Z_{m+1} = Z_m + E_i$.

Procedeul se oprește cînd $Z_m = 0$. În cazul *i*) avem $p_a(Z_m) = = p_a(Z_{m+1} + Z) = p_a(Z_{m+1}) + p_a(Z) + (Z \cdot Z_{m+1}) - 1 = p_a(Z_{m+1}) + + (Z \cdot Z_{m+1}) - 1 \leqslant p_a(Z_{m+1}) - 1$ (deoarece $(Z \cdot Z_{m+1}) \leqslant 0$), deci în cazul *i*) obținem:

(3.21.2) $$p_a(Z_{m+1}) > p_a(Z_m).$$

În cazul *ii*), inegalitatea (3.21.1) arată că $p_a(Z_{m+1}) \geqslant p_a(Z_m)$.

Observăm acum că deoarece $(E_i^2) < 0$, situația *ii*) nu se poate repeta la infinit fără a apare și situația *i*). Pe de altă parte, observăm

(inducţie) că dacă $Z' = \sum_{i=1}^{n} s_i E_i$, atunci $p_a(Z')$ se poate exprima ca o funcţie polinomială de grad doi în $s_1, \ldots, s_n$, în care partea omogenă de grad doi este $1/2 \sum_{i,j} s_i s_j (E_i \cdot E_j)$. Deoarece matricea $\|(E_i \cdot E_j)\|$ este definită negativ, rezultă că mulţimea de întregi $\{p_a(Z') \mid Z' \in G, Z' > 0\}$ este mărginită superior. De aici rezultă, ţinînd cont de cele spuse mai înainte şi de (3.21.2), că procedeul de mai sus se sfîrşeşte cu siguranţă după un număr finit de paşi, altfel spus există un $m \geqslant 1$ astfel încît $Z_{m+1} = 0$. Atunci $Z_m = Z$ şi deci $p_a(Z_1) \leqslant p_a(Z) = 0$. Teorema (3.21) este demonstrată. Q.E.D.

(3.22) Fie X o suprafaţă şi $I \subset O_X$ un fascicul coerent de ideale. Definim fasciculul

$$I^{-1}(U) = \{a \in k(X) \mid a \cdot I(U) \subseteq O_X(U)\},$$

care este un subfascicul coerent al fasciculului constant $k(X)$ al tuturor funcţiilor raţionale pe X. Fasciculul $(I^{-1})^{-1}$ (definit în mod similar, deoarece $I^{-1} \subset k(X)$) conţine pe I şi este fascicul de ideale. I se numeşte ideal divizorial dacă $I = (I^{-1})^{-1}$. După Bourbaki, *Algèbre commutative*, chap. VII, I este divizorial dacă şi numai dacă fiecare componentă primară a idealului $I_x \subset O_{X,x}$ (cu x punct arbitrar al lui X) are idealul prim asociat de înălţime 1. Cum X este nesingulară, aceasta revine la faptul că I este local dat de o singură ecuaţie, deci la faptul că I este inversibil.

(3.23) LEMĂ. *Fie $f: X \to Y$ un morfism de la suprafaţa nesingulară X la suprafaţa normală şi afină $Y = \operatorname{Spec}(A)$, şi fie E o curbă conexă de componente integre $E_1, \ldots, E_n$. Presupunem că $f(E)$ este un punct pe Y, f este izomorfism între $X - E$ şi $Y - y$ şi că $R^1 f_* O_X = H^1(O_X) = 0$. Dacă m este idealul maximal în A corespunzător punctului $y = f(E)$, atunci idealul mO_X este inversibil.*

Demonstraţie. După (3.22) este suficient să arătăm că idealul $I' = (I^{-1})^{-1}$ coincide cu $I = mO_X$. Considerăm O_X-modulul coerent I'/I al cărui suport nu poate conţine decît cel mult puncte închise şi deci Supp (I'/I) este cel mult finit. În particular, $H^1(X, I'/I) = 0$. În şirul exact

$$0 \to \Gamma(I'/I) \to \Gamma(O_X/I) \to \Gamma(O_X/I') \to H^1(I'/I) = 0 \tag{3.23.1}$$

avem $\Gamma(O_X/I) = k$. Într-adevăr, deoarece $I = mO_X$ există un şir exact de forma $0 \to K \to O_X^m \to I \to 0$, de unde rezultă şirul exact:

$$0 = H^1(O_X^m) \to H^1(I) \to H^2(K) = 0.$$

şi deci $\Gamma(O_X/I) = \Gamma(O_X)/\Gamma(I)$. Însă $m \subseteq \Gamma(I) \subsetneqq \Gamma(O_X) = A$, de unde $\Gamma(O_X/I) = A/m = k$.

Din (3.23.1) rezultă atunci $\Gamma(I'/I) = 0$ sau $\Gamma(O_X/I') = 0$. Însă deoarece f nu este izomorfism, dim Supp $(O_X/I) = 1$, $I' \neq O_X$, altfel spus $\Gamma(O_X/I') \neq 0$, şi deci $\Gamma(I'/I) = 0$. Cum am observat că I'/I are suportul cel mult finit, rezultă $I' = I$. Q.E.D.

(3.24) LEMĂ. *În ipotezele lui* (3.23), *presupunem în plus că* $A = O_{Y,y}$. *Atunci pentru orice* O_X*-modul inversibil* L *avem*:

i) $(L \cdot E_i) = 0$, $i = 1, \ldots, n$, *implică* $L \cong O_X$.

ii) $(L \cdot E_i) \geqslant 0$, $i = 1, \ldots, n$, *implică* L *este generat de secţiunile sale globale şi* $H^1(L) = 0$.

Demonstraţie. Vom folosi observaţia următoare: $H^1(L) = 0$ dacă şi numai dacă $H^1(L \otimes O_Z) = 0$ pentru orice divizor pozitiv Z de suport conţinut în E. Într-adevăr, o implicaţie rezultă imediat folosind faptul că $H^2 = 0$ pentru orice O_X-modul coerent, iar cealaltă cu ajutorul teoremei lui Zariski a funcţiilor olomorfe (a se vedea demonstraţia lui (3.8)).

Vom proba mai întîi *ii*). Fie $x \in X$ un punct închis. Atunci $x \in E$. Avem de arătat că L are o secţiune globală ce nu se anulează în x. După (3.8), $H^1(O_Z) = 0$ pentru orice $Z > 0$ cu Supp $(Z) \subseteq E$, deci dacă punem $L_Z = L \otimes O_Z$, atunci L_Z este generat de secţiunile sale globale deoarece $\deg_{E_i}(L_Z/E_i) = (L \cdot E_i) \geqslant 0$ şi se aplică (3.6). Cum în mod evident $(mO_X)_Z = mO_X \otimes O_Z$ este generat de secţiunile sale globale şi, după (3.23), inversibil, rezultă că $(L \otimes mO_X)_Z$ este un O_Z-modul inversibil generat de secţiunile sale globale. După (3.6) deducem atunci $H^1((L \otimes mO_X)_Z) = 0$. Cum Z este arbitrar, observaţia de la început arată că $H^1(L \otimes mO_X) = 0$. Şirul exact de coomologie

$$H^0(L) \to H^0(L \otimes (O_X/mO_X)) \to H^1(L \otimes mO_X) = 0$$

arată că prima săgeată este surjectivă. Fie acum Z' curba definită de idealul inversibil mO_X. Atunci, deoarece $L \otimes (O_X/mO_X) = L_{Z'}$ este generat de secţiunile sale globale şi $x \in Z'$, rezultă că există o secţiune $s' \in H^0(L \otimes O_{Z'})$ astfel încît $s'(x) \neq 0$. Cum s' se ridică la o secţiune $s \in H^0(L)$, L este generat de secţiunile sale globale deoarece avem de asemenea $s(x) \neq 0$. Faptul că $H^1(L) = 0$ rezultă imediat şi deci *ii*) este dovedit.

Cu toate că *i*) este esenţialmente conţinut în (3.10), se mai poate totuşi da şi următorul argument. Cu aceleaşi argumente ca mai sus se arată că în ipotezele lui *i*) există $s' \in H^0(L_{Z'})$ cu proprietatea că

nu se anulează nicăieri (cf. 3.4)). De aici rezultă că s nu se anulează în nici-un punct al lui Z, deci în nici-un punct al lui X, deoarece A este inel local. Q.E.D.

(3.25) LEMĂ. *În ipotezele lemei (3.24), pentru orice $p \geq 1$, aplicația canonică $m^p \to \Gamma(m^p O_X)$ este un izomorfism.*

Demonstrație. Folosind inducție după p (cazul $p = 1$ fiind banal și deja observat în demonstrația lui (3.23)), totul revine la a arăta că aplicația naturală ($p \geq 2$)

$$\Gamma(m^{p-1}O_X) \otimes \Gamma(mO_X) \to \Gamma(m^p O_X) \tag{3.25.1}$$

este surjectivă. Cum această aplicație se factorizează în

$$\Gamma(m^{p-1}O_X) \otimes \Gamma(mO_X) \xrightarrow{v} \Gamma(m^{p-1}O_X \otimes mO_X) \to \Gamma(m^p O_X). \tag{3.25.2}$$

și cum $m^i O_X$ este inversibil pentru orice i (cf. (3.23)), a doua săgeată este un izomorfism, deci totul revine la a proba surjectivitatea lui v. Fie pentru aceasta

$$0 \to K_1 \to O_X^s \xrightarrow{u_1} m^{p-1}O_X \to 0$$

$$0 \to K_2 \to O_X^t \xrightarrow{u_2} mO_X \to 0$$

două șiruri exacte (a căror existență este clară) care induc șirurile exacte de coomologie

$$\Gamma(O_X^s) \xrightarrow{\alpha_1} \Gamma(m^{p-1}O_X) \to H^1(K_1) \to H^1(O_X^s) = 0,$$

$$\Gamma(O_X^t) \xrightarrow{\alpha_2} \Gamma(mO_X) \to H^1(K_2) \to H^1(O_X^t) = 0$$

în care α_1 și α_2 pot fi alese surjective. Rezultă $H^1(K_1) = H^1(K_2) = 0$. Fie $N = \mathrm{Ker}(u_1 \otimes u_2)$. Șirul exact

$$K = (K_1 \otimes O_X^t) \oplus (K_2 \otimes O_X^s) \to O_X^s \otimes O_X^t \to m^{p-1}O_X \otimes mO_X \to 0$$

arată că avem șirul exact

$$0 \to M \to K \to N \to 0.$$

Cum $H^1(K) = 0$ și $H^2(M) = 0$ (fibrele lui f sînt de dimensiune ≤ 1), atunci $H^1(N) = 0$, deci aplicația naturală $\Gamma(u_1 \otimes u_2)$:

$\Gamma(O^s_X \otimes O^t_X) \to \Gamma(m^{p-1}O_X \otimes mO_X)$ este surjectivă. Considerînd diagrama comutativă

$$\begin{array}{ccc} \Gamma(O^s_X) \otimes \Gamma(O^t_X) & \xrightarrow{\sim} & \Gamma(O^s_X \otimes O^t_X) \\ \downarrow{\scriptstyle \alpha_1 \otimes \alpha_2} & & \downarrow{\scriptstyle \Gamma(u_1 \otimes u_2)} \\ \Gamma(m^{p-1}O_X) \otimes \Gamma(mO_X) & \xrightarrow{v} & \Gamma(m^{p-1}O_X \otimes mO_X) \end{array}$$

arată că v este surjectiv. Q.E.D.

(3.26) *Observație*. Lema (3.25) probează de fapt că toate puterile lui m sînt — în terminologia din Lipman [1] — complete, și deci (*loc. cit.*) dacă (Y, y) este o singularitate rațională, atunci transformata pătratică a lui Y de centru y este normală. Acest fapt combinat cu o observație simplă (anume că singularitățile ce pot apărea pe transformata pătratică a lui Y de centru y sînt tot singularități raționale) arată că orice singularitate rațională se poate desingulariza numai cu ajutorul transformărilor pătratice, ne mai fiind necesare normalizări. O singularitate cu această ultimă proprietate se mai numește singularitate absolut izolată.

(3.27) LEMĂ. *Fie (Y, y) o singularitate normală de dimensiune $r > 1$ și fie $f: X \to Y$ un morfism birațional astfel încît $L = mO_X$ să fie inversibil. Presupunînd că Y este varietate completă, atunci multiplicitatea inelului local $O_{Y,y}$ coincide cu $-(L^{\cdot r})_X = (-1)^{r-1} \cdot (D^{\cdot r})$, unde D este divizorul efectiv definit de idealul L.*

Demonstrație. Fie $\sigma: X_1 \to Y$ transformarea pătratică a lui Y de centru y și $L_1 = O_{X_1}(1) = mO_{X_1}$. Din proprietatea de universalitate a lui σ, rezultă că există un unic morfism astfel încît $\sigma \circ u = f$ și $u^*(L_1) \cong L$. Deoarece u este birațional, din (1.18) rezultă că $(L_1^{\cdot r})_{X_1} = (L^{\cdot r})_X$, deci va fi suficient să dovedim afirmația din lemă în cazul cînd $f = \sigma$. Însă atunci $X = \mathrm{Proj}\left(\bigoplus_{i=0}^{\infty} m^i\right)$, iar din șirul spectral Leray

$$E_2^{pq} = H^p(Y, R^q f_* O_X(n)) \Rightarrow H^{p+q}(X, O_X(n)) = H^{p+q}(X, L^n)$$

rezultă că $E_2^{pq} = 0$ pentru orice $q > 0$ și $n \gg 0$ (EGA III 2.2.1). Deci $H^p(Y, f_*O_X(n)) = H^p(X, L^n)$ pentru orice $p \geqslant 0$ și $n \gg 0$. Însă cum $f_*O_X(n) = m^n$ dacă $n \gg 0$, obținem pentru orice $p \geqslant 0$ și $n \gg 0$, izomorfismele $H^p(Y, m^n) \cong H^p(X, L^n)$, de unde egalitatea $\chi(Y, m^n) = \chi(X, L^n)$ cu $n \gg 0$. Fie $P(n) = \chi(X, L^n)$. După (1.1) și (1.21) $P(n)$ este un polinom de forma $P(n) = a/r!\, n^r + \ldots$, cu $a=$

$=(L^{\cdot r})$. Atunci funcţia diferenţă are forma $\Delta P(n)=a/(r-1)!\cdot n^{r-1}+ + \dots$, iar pe de altă parte

$$\Delta P(n) = \Delta\chi(Y, m^n) = -\dim_k(m^n/m^{n+1})$$

(folosind şirul exact $0\to m^{n+1}\to m^n\to m^n/m^{n+1}\to 0$ şi aditivitatea caracteristicii Euler-Poincaré). Q.E.D.

Sîntem acum în măsură să demonstrăm următorul rezultat important:

(3.28) TEOREMĂ. (M. Artin). *Fie (Y, y) o singularitate normală de dimensiune 2 şi $f: X \to Y$ o desingularizare a lui (Y, y). Dacă (Y, y) este singularitate raţională şi Z este ciclul fundamental al fibrei $E = f^{-1}(y)_{red} = E_1 + \dots + E_n$, iar m este idealul maximal al inelului local $O_{Y,y}$, atunci $X\times_Y \mathrm{Spec}(O_{Y,y}/m^n) = nZ$, $H^0(O_{nZ})\cong \cong O_{Y,y}/m^n$ şi $\dim_k(m^n/m^{n+1}) = -n\cdot(Z^2)+1$, pentru orice $n\geqslant 1$.*

Demonstraţie. Este clar că putem presupune $Y = \mathrm{Spec}(A)$, cu $A = O_{Y,y}$, deoarece, cu toate că $X = f^{-1}(\mathrm{Spec}(O_{Y,y}))$ nu mai este suprafaţă proiectivă, autointersecţia divizorului Z de pe X are sens fiindcă Z este curbă proiectivă. Prima afirmaţie este atunci echivalentă cu egalitatea $m^nO_X = O_X(-nZ)$ pentru orice $n\geqslant 1$. Este însă clar că este suficient să dovedim că $mO_X = O_X(-Z)$. Fie $g\in m$, $g\neq 0$. Atunci

$$\mathrm{div}_X(g) = D + Z',$$

cu Z' divizor strict pozitiv de suport E, iar D divizor pozitiv ce nu conţine nici-o componentă E_i. Deoarece E_i sînt curbe proiective, avem

$$(\mathrm{div}_X(g)\cdot E_i) = 0 \text{ pentru orice } i,$$

şi deci $(Z'\cdot E_i) = -(D\cdot E_i) \leqslant 0$ pentru orice i. Ţinînd cont de definiţia ciclului fundamental, rezultă $Z'\geqslant Z$. Altfel spus, $mO_X \subseteq \subseteq O_X(-Z)$.

Pentru a dovedi că $O_X(-Z) = mO_X$ va fi suficient să arătăm că pentru orice punct $P\in Z$ există o funcţie $g\in m$ al cărei divizor să fie egal în jurul lui P cu Z. În acest scop observăm că $L = =O_X(-Z)$ are proprietatea $(L\cdot E_i) = -(Z\cdot E_i)\geqslant 0$ pentru orice i, deci după (3.24) L este generat de secţiunile sale globale. Există deci un divizor pozitiv $D\in |L|$ care nu trece prin P. Din izomorfismul $O_X(-Z)\cong O_X(D)$ deducem $O_X(Z+D)\cong O_X$, deci există un $g\in Q(A)$ (corpul fracţiilor lui A) astfel încît $\mathrm{div}_X(g) = Z + D$. Cum $Z > > 0$ şi $D > 0$, $g\in m$, şi prima afirmaţie a teoremei este demonstrată

Considerăm acum diagrama comutativă cu liniile exacte

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & m^n & \longrightarrow & A & \longrightarrow & A/m^n & \longrightarrow & 0 \\ & & \wr\downarrow & & \wr\downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & H^0(m^n O_X) & \longrightarrow & H^0(O_X) & \longrightarrow & H^0(O_{nZ}) & \longrightarrow & H^1(m^n O_X) \end{array}$$

Însă după (3.24), $H^1(m^n O_X) = H^1(O_X(-nZ)) = 0$ (am ținut cont și de prima afirmație a teoremei), deoarece $(-nZ \cdot E_i) \geqslant 0$ pentru orice i, ceea ce demonstrează a doua egalitate din enunț, primele două săgeți verticale fiind izomorfisme.

În fine, din șirul exact

$$0 \to O_X(-nZ) \otimes O_Z \to O_{(n+1)Z} \to O_{nZ} \to 0$$

deducem șirul exact de coomologie

$$0 \to H^0(O_X(-nZ) \otimes O_Z) \to H^0(O_{(n+1)Z}) \to H^0(O_{nZ}) \to H^1(O_X(-nZ) \otimes O_Z)$$

în care ultimul grup de coomologie este trivial deoarece $(-nZ \cdot E_i) \geqslant \geqslant 0$ pentru orice i și se aplică (3.6). Deci, ținînd cont că $H^0(O_{(n+1)Z}) = A/m^{n+1}$, $H^0(O_{nZ}) = A/m^n$, rezultă că

$$\dim m^n/m^{n+1} = \dim H^0(O_X(-nZ) \otimes O_Z) = (\text{după } (3.7))$$

$$= -\sum_i nr_i(Z \cdot E_i) + \dim H^0(O_Z) = -n \cdot (Z^2) + 1. \text{ Q.E.D.}$$

(3.29) COROLAR. *În ipotezele teoremei (3.28), dimensiunea spațiului tangent al lui Zariski $T_{Y,y}$ al singularității (Y, y) coincide cu $-(Z^2) + 1$, iar multiplicitatea lui $O_{Y,y}$, cu $-(Z^2)$.*

(3.30) TEOREMĂ. (Castelnuovo). *Fie X o suprafață proiectivă nesingulară și E o curbă conexă pe X de componente integre $E_1, \ldots, \ldots, E_n$. Atunci există un morfism $f: X \to Y$ astfel încît $f/X - E$ este un izomorfism între $X - E$ și $Y - f(E)$ și $f(E) = y$ este un punct nesingular pe Y dacă și numai dacă matricea de intersecție $\|(E_i \cdot E_j)\|$ este definită negativ și ciclul fundamental al lui E satisface condițiile $p_a(Z) = 0$ și $(Z^2) = -1$. În aceste condiții contracția (Y, f) este unic determinată abstracție făcînd de un izomorfism canonic, iar Y este de asemenea proiectivă. Dacă în plus E este curbă integră cu*

$p_a(E) = 0$ *și* $(E^2) = -1$, *atunci* f *coincide cu transformarea pătratică a lui* Y *de centru* y.

Demonstrație. Exceptînd ultima afirmație, teorema este o consecință imediată a teoremei (3.9), teoremei (3.21) și corolarului (3.29). Pentru a dovedi că f coincide cu transformarea pătratică a lui Y de centru y dacă E este integră, observăm că din (3.8) rezultă $R^1 f_* O_X = 0$, și deci după (3.23) idealul mO_X este inversibil (în notațiile lui (3.28)). Dacă $g: X' \to Y$ este transformarea pătratică a lui Y de centru y, există (proprietatea de universalitate a lui g) un unic morfism $u: X \to X'$ cu proprietățile $g \circ u = f$ și $u^* O_{X'}(1) \cong mO_X$. Cum u este morfism birațional cu fibre finite și X' este nesingulară, rezultă că u este izomorfism. Q.E.D.

(3.31) TEOREMĂ. *Fie* $f: X \to Y$ *o desingularizare a singularității normale* (Y, y) *de dimensiune* 2, $E = f^{-1}(y)_{red}$ *fibra redusă a lui* f *de componente integre* $E_1, \ldots, E_n$ *și* Z *ciclul fundamental al lui* E. *Următoarele afirmații sînt echivalente:*

a) $p_a(Z) = 0$ *și* $(Z^2) = -2$, *altfel spus* (Y, y) *este un punct rațional dublu* (*cf.* (3.21) *și* (3.29)).

b) $(Z \cdot K) = 0$ *și* $(Z^2) = -2$.

Dacă în plus E *nu conține curbe* E_i *cu proprietățile* $p_a(E_i) = 0$ *și* $(E_i^2) = -1$, *atunci aceste condiții sînt echivalente și cu:*

c) $p_a(E_i) = 0$ *și* $(E_i^2) = -2$ *pentru orice* $i = 1, \ldots, n$.

Demonstrație. Echivalența dintre a) și b) rezultă imediat din formula $p_a(Z) = 1/2\,(Z^2) + 1/2\,(Z \cdot K) + 1$. Observăm acum că în fiecare din condițiile a), b) sau c) avem $p_a(E_i) = 0$ pentru orice i, iar din ipotezele noastre rezultă $(E_i^2) \leqslant -2$ ·b) $\Rightarrow$ c) : avem $(K \cdot E_i) = 2p_a(E_i) - 2 - (E_i^2) \geqslant 0$. Fie $Z = \sum_{i=1}^{n} r_i E_i$; atunci $0 = (Z \cdot K) = \sum_{i=1}^{n} r_i (K \cdot E_i)$, și cum $(K \cdot E_i) \geqslant 0$ pentru orice i, rezultă $(K \cdot E_i) = 0$ pentru orice i. Din $p_a(E_i) = 0$ rezultă atunci $(E_i^2) = -2$ pentru orice i.

c) $\Rightarrow$ a) : Am văzut deja în demonstrația lui (3.15) că $p_a(Z') \leqslant 0$ pentru orice $Z' > 0$ de suport conținut în E, deci după (3.8) și (3.21) rezultă $p_a(Z) = 0$. Cum $(K \cdot E_i) = 0$ pentru orice i, avem și $(Z \cdot K) = 0$, deci și $(Z^2) = -2$. Q.E.D.

(3.32) TEOREMĂ. *Fie* X *o suprafață proiectivă și nesingulară și* E *o curbă conexă de componente integre* $E_1, \ldots, E_n$. *Presupunem că matricea de intersecție* $\|(E_i \cdot E_j)\|$ *este definită negativ,* $p_a(E_i) = 0$ *și* $(E_i^2) = -2$, $i = 1, \ldots, n$. *Atunci există doar următoarele tipuri de configurații pentru* E (*corespunzătoare diagramelor Dynkin din*

clasificarea algebrelor Lie semisimple), în care toate intersecțiile sînt transversale :

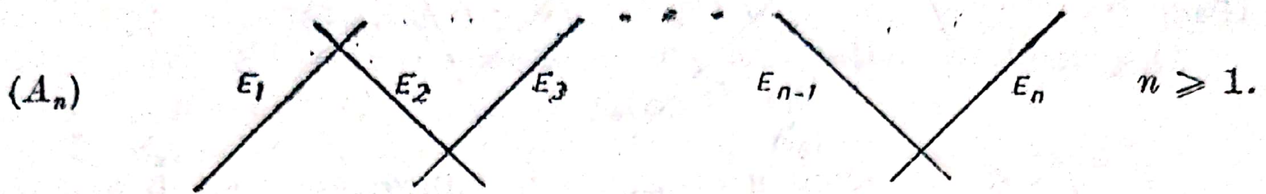


Figura 1

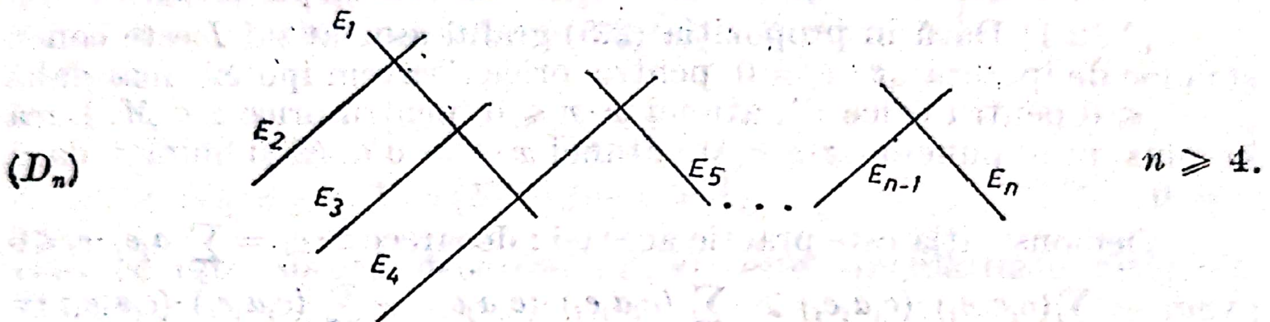


Figura 2

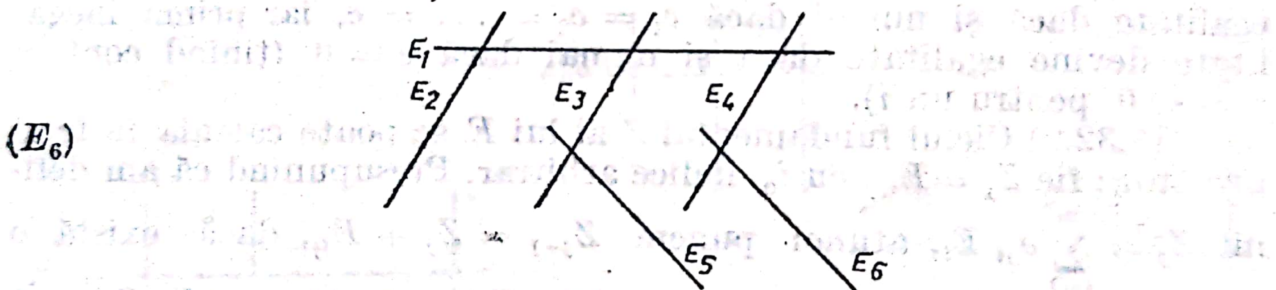


Figura 3

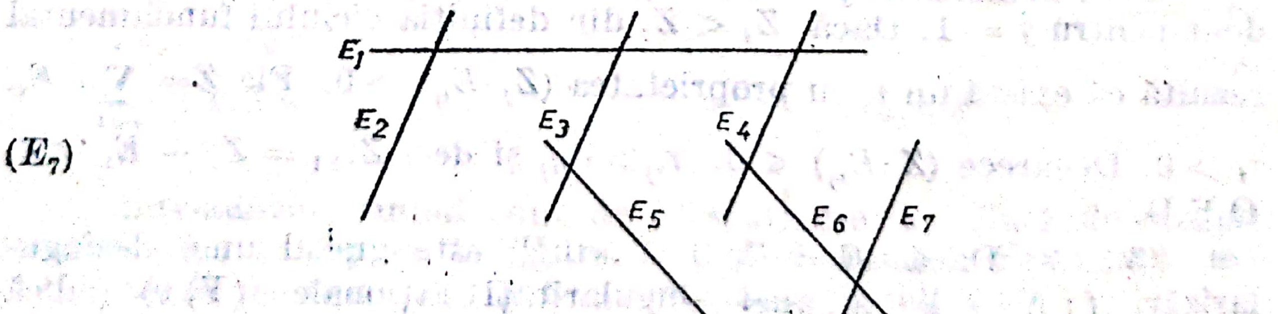


Figura 4

(E_8)

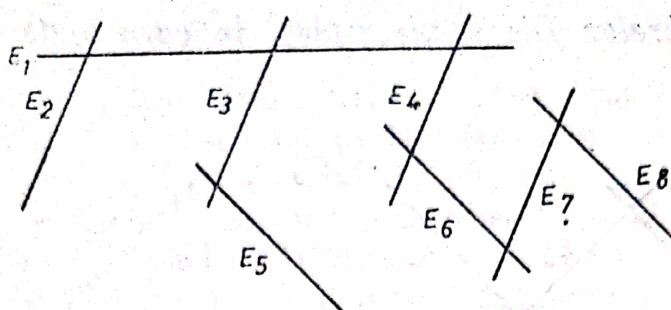


Figura 5

Pentru demonstraţie avem nevoie de cîteva pregătiri.

(3.32.1) Dacă în propoziţia (2.5) graful asociat lui I este conex şi în loc de ipoteza „$z \cdot e_i = 0$ pentru orice i" avem ipoteza mai slabă „$z \cdot e_i \leqslant 0$ pentru orice i", atunci $x \cdot x \leqslant 0$ pentru orice $x \in M$. Dacă în plus presupunem $z \cdot z < 0$, atunci $x \cdot x = 0$ dacă şi numai dacă $x = 0$.

Demonstraţia este practic aceeaşi : deoarece $z \cdot e_i = \sum_j a_j e_j \cdot e_i \leqslant 0$ avem $-\sum_i (c_i a_i e_i) \cdot (c_i a_i e_i) \geqslant \sum_{i,j} (c_i a_i e_i) \cdot (c_i a_j e_j) - \sum_i (c_i a_i e_i) \cdot (c_i a_i e_i) =$
$= \sum_{i \neq j} c_i^2 (a_i e_i) \cdot (a_j e_j) = 1/2 \sum_{i \neq j} (c_i^2 + c_j^2)(a_i e_i) \cdot (a_j e_j) \geqslant \sum_{i \neq j} c_i c_j (a_i e_i) \cdot (a_j e_j)$, de unde $x \cdot x \leqslant 0$. Dacă $z \cdot z < 0$, atunci ultimul semn $\geqslant$ devine egalitate dacă şi numai dacă $c_1 = c_2 = \ldots = c$, iar prima inegalitate devine egalitate dacă şi numai dacă $c = 0$ (ţinînd cont că $z \cdot e_i < 0$ pentru un i).

(3.32.2) Ciclul fundamental Z al lui E se poate calcula în felul următor : fie $Z_1 = E_{i_0}$, cu i_0 indice arbitrar. Presupunînd că am definit $Z_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ji} E_i$, atunci punem $Z_{j+1} = Z_j + E_{i_j}$, dacă există o componentă E_{i_j} cu proprietatea $(E_{i_j} \cdot Z_j) > 0$. Dacă $(E_i \cdot Z_j) \leqslant 0$ pentru orice i, atunci $Z = Z_j$ este chiar ciclul fundamental al lui E.

Vom demonstra prin inducţie că $Z_j \leqslant Z$, acest fapt fiind evident pentru $j = 1$. Dacă $Z_j < Z$, din definiţia ciclului fundamental rezultă că există un i_j cu proprietatea $(Z_j \cdot E_{i_j}) > 0$. Fie $Z = \sum_{i=1}^{r} r_i E_i$, $r_i > 0$. Deoarece $(Z \cdot E_{i_j}) \leqslant 0$, $r_{i_j} > a_{ji_j}$ şi deci $Z_{j+1} = Z_j + E_{i_j} \leqslant Z$. Q.E.D.

(3.32.3) Dacă $E = E_1 \cup \ldots \cup E_n$ este graful unei desingularizări $f : X \to Y$ a unei singularităţi raţionale (Y, y) (adică $E = f^{-1}(y)_{\text{red}}$), atunci pentru orice $i \neq j$ astfel încît $(E_i \cdot E_j) > 0$,

rezultă $(E_i \cdot E_j) = 1$. În plus, pentru orice $i \neq j \neq h \neq i$ avem $E_i \cap E_j \cap E_h = \emptyset$ şi în componenţa acestui graf nu pot apărea bucle.

Într-adevăr, avem $0 \geqslant p_a(E_i + E_j) = p_a(E_i) + p_a(E_j) + (E_i \cdot E_j) - 1 = (E_i \cdot E_j) - 1$, de unde prima afirmaţie. Analog, $p_a(E_i + E_j + E_h) = p_a(E_i + E_j) + p_a(E_h) + (E_i + E_j \cdot E_h) - 1 = (E_i \cdot E_j) + (E_j \cdot E_h) + (E_i \cdot E_h) - 2 \leqslant 0$, de unde rezultă şi afirmaţia a doua din (3.32.3). Presupunem acum că $h \geqslant 3$ componente $E_1, \ldots, E_h$ ar forma o buclă (fig. 6). Fie atunci $Z' = E_2 + \ldots + E_h$. Prin inducţie după h se arată imediat că $p_a(Z') = 0$. Deoarece $(E_1 \cdot Z') = 2$ avem

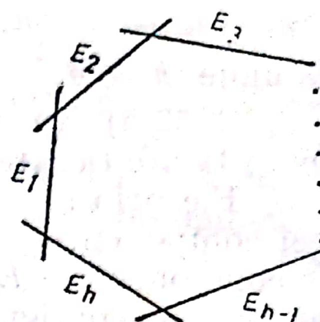


Figura 6

$$p_a(E_1 + Z') = p_a(E_1) + p_a(Z') + (E_1 \cdot Z') - 1 = (E_1 \cdot Z') - 1 \geqslant 1,$$

ceea ce este absurd deoarece (Y, y) este singularitate raţională. Q.E.D.

(3.32.4) În ipotezele lui (3.32), nu există nici-o componentă tăiată de cel puţin patru alte componente.

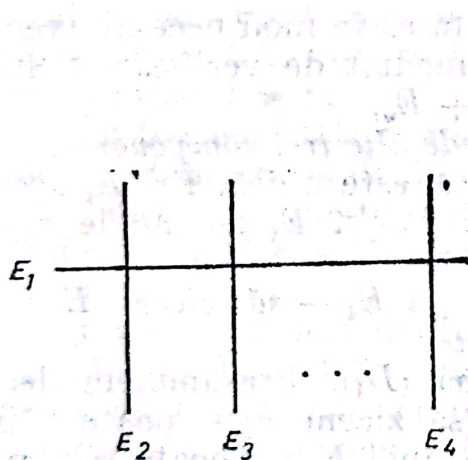


Figura 7

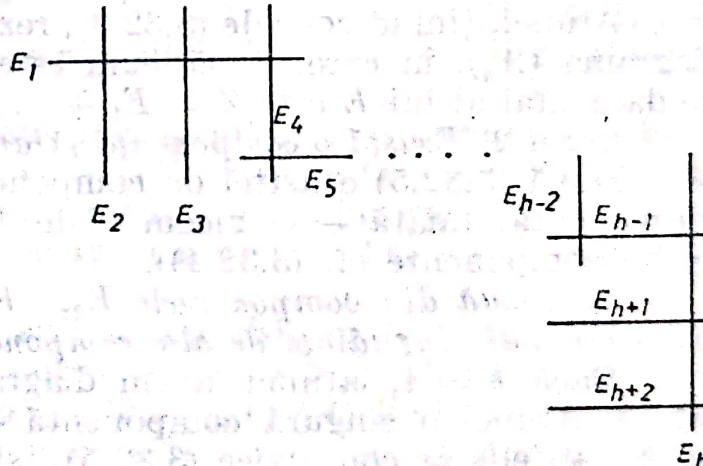


Figura 8

Într-adevăr, ţinînd cont de (3.32.3), fie E_1 tăiată de componentele $E_2, \ldots, E_h$ ca în figura 7. Ţinînd cont că E_i nu intersectează pe E_j pentru $i \neq j \geqslant 2$, avem (inducţie după h):

$$p_a(E_2 + \ldots + E_h) = -(h-2).$$

Atunci

$$p_a(2E_1 + E_2 + \ldots + E_h) = p_a(2E_1) + p_a(E_2 + \ldots + E_h) +$$

$$+ 2(E_1 \cdot E_2 + \ldots + E_h) - 1 = -3 - (h-2) + 2(h-1) -$$

$$-1 = h - 4 \leqslant 0,$$

de unde $h \leqslant 4$.

(3.32.5) Nu pot exista (în ipotezele lui (3.32)) două componente tăiate fiecare de cîte trei componente.

Fie prin absurd componentele E_1 și $E_h (h \geqslant 4)$ tăiate de cîte trei componente fiecare: E_1 de componentele E_2, E_3 și E_4, iar E_h de componentele E_{h-1}, E_{h+1} și E_{h+2}. În plus, deoarece E este conexă, am avea o configurație ca în figura 8. Punînd $Z' = E_1 + E_4 + E_5 + \ldots + E_h$, se verifică imediat că $p_a(Z') = 0$ și $(Z'^2) = -2$. Atunci Z' ar fi tăiată de curbele $E_2, E_3, E_{h+1}, E_{h+2}$. Însă $p_a(E_2 + E_3 + E_{h+1} + E_{h+2}) = -3$ și $p_a(2Z') = (Z'^2) - 1 = -3$. Deci $p_a(2Z' + E_2 + E_3 + E_{h+1} + E_{h+2}) = -3 - 3 + 2(Z' \cdot E_2) + 2(Z' \cdot E_3) + 2(Z' \cdot E_{h+1}) + 2(Z' \cdot E_{h+2}) - 1 = 1$, ceea ce contrazice ipotezele lui (3.32).

Demonstrația teoremei (3.32). *Cazul* 1. *Nu există nici-o componentă tăiată de alte trei componente.*

Atunci, ținînd cont de (3.32.3), rezultă că în mod necesar avem diagrama (A_n), în care, după cum este imediat verificat, ciclul fundamental al lui E este $Z = E_1 + \ldots + E_n$.

Cazul 2. *Există o componentă tăiată de alte trei componente.*

După (3.32.5) o astfel de componentă este unică. Fie E_1 acea componentă, tăiată — să zicem — de E_2, E_3 și E_4 (și nu de mai multe componente cf. (3.32.4)).

2a) *Două din componentele* E_2, E_3 *și* E_4 — *să zicem* E_2 *și* E_3 — *nu mai sînt tăiate de alte componente.*

Dacă $n = 4$, atunci avem diagrama (D_4). Presupunem deci $n \geqslant 5$. Atunci o singură componentă — să zicem E_5 — poate tăia pe E_4 (altfel s-ar contrazice (3.32.5)), și atunci E_5 nu poate tăia pe E_1 (cf. (3.32.3)) și nici pe E_2 sau E_3 prin ipoteză. Dacă $n = 5$, avem diagrama (D_5). Dacă $n \geqslant 6$, o singură componentă — să zicem E_6 — poate tăia pe E_5, și la fel ca mai înainte, pe nici una dintre componentele $E_1, \ldots, E_4$, și așa mai departe. Sîntem prin urmare conduși totdeauna în acest subcaz la diagrama (D_n). În plus, dacă $n = 4$, ciclul fundamental este $Z = 2E_1 + E_2 + E_3 + E_4$, iar dacă $n \geqslant 5$, ciclul fundamental este $Z = 2E_1 + E_2 + E_3 + 2E_4 + \ldots + 2E_{n-1} + E_n$.

2b) *Numai una din componentele E_2, E_3, E_4 nu mai este tăiată de nici-o altă componentă E_i, $i \geqslant 5$.* Să zicem spre exemplu că E_2 nu mai este tăiată de nici-o componentă E_i, $i \geqslant 5$. Vom arăta că acest subcaz conduce la diagramele (E_6), (E_7), sau (E_8).

În orice caz, numărul n al tuturor componentelor trebuie să fie $\geqslant 6$. Dacă $n = 6$, avem atunci în mod necesar diagrama (E_6), în care caz ciclul fundamental este $Z = 3E_1 + 2E_2 + 2E_3 + 2E_4 + E_5 + E_6$ (totdeauna în calculul ciclului fundamental se folosește (3.32.2)), iar $(Z \cdot E_2) = -1$, $(Z \cdot E_i) = 0$ pentru $i \neq 2$.

Dacă $n = 7$, presupunem de exemplu că E_5 taie pe E_3, E_6 taie pe E_4. Atunci componenta E_7 poate tăia, ținînd cont de (3.32.3), (3.32.4) și (3.32.5), numai una din componentele E_5 sau E_6, să zicem pe E_6. Sîntem atunci conduși la diagrama (E_7) cu ciclul fundamental $Z = 4E_1 + 2E_2 + 3E_3 + 3E_4 + 2E_5 + 2E_6 + E_7$ satisfăcînd relațiile $(Z \cdot E_5) = -1$, $(Z \cdot E_i) = 0$ dacă $i \neq 5$.

Presupunem $n = 8$. Există două posibilități: componenta E_8 să taie fie pe E_5 fie pe E_7. Însă E_8 nu poate tăia pe E_5 deoarece atunci, dacă Z' este ciclul fundamental al lui (E_7), avem

$$((Z' + E_8)^2) = (Z'^2) + 2(Z' \cdot E_8) + (E_8^2) = -2 + 4 - 2 = 0,$$

ceea ce contrazice faptul că matricea de intersecție $\|(E_i \cdot E_j)\|$ este definită negativ. Prin urmare obținem în mod necesar diagrama (E_8), avînd ciclul fundamental $Z = 6E_1 + 3E_2 + 4E_3 + 5E_4 + 2E_5 + 4E_6 + 3E_7 + 2E_8$ care satisface relațiile $(Z \cdot E_8) = -1$ și $(Z \cdot E_i) = 0$ pentru orice $i \neq 8$.

În toate situațiile apărute pînă acum ar mai trebui să ne convingem că matricea de intersecție $\|(E_i \cdot E_j)\|$ este negativ definită. Acest lucru se poate deduce imediat cu ajutorul lui (3.32.1), luînd $e_i = E_i$ și $z = Z$, deoarece avem $z \cdot z = -2$ și $z \cdot e_i \leqslant 0$ pentru orice i.

Ca să încheiem analiza subcazului 2b), va fi suficient să arătăm că în subcazul 2b) nu putem avea $n \geqslant 9$. Presupunem prin absurd că $n \geqslant 9$. Atunci după (3.32.3), (3.32.4) și (3.32.5) s-ar mai adăuga fie o componentă E' ce ar tăia (transversal) numai pe E_5, fie o componentă E'' ce ar tăia numai pe E_8. Dacă Z' este ciclul fundamental al diagramei (E_8) determinat mai sus, atunci am avea $(E_5 \cdot E') = 1$, $(E_8 \cdot E'') = 1$, deci $(Z' \cdot E') = 2$, $(Z' \cdot E'') = 2$. Atunci $((Z' + E')^2) = (Z'^2) + 2(Z' \cdot E') + (E'^2) = -2 + 4 - 2 = 0$, sau analog $((Z' + E'')^2) = 0$. Deci în ambele cazuri matricea de intersecție nu ar mai fi definită negativ.

2c) *Toate componentele E_1, E_2 și E_4 sînt intersectate de cîte o componentă a lui E diferită de E_1.*

Vom arăta că în acest subcaz matricea de intersecţie $\|(E_i \cdot E_j)\|$ nu poate fi definită negativ. Presupunem prin absurd că E_4 ar fi tăiată de componenta E_6, E_3 de E_5 şi E_2 de E_7. Atunci ţinînd cont de (3.32.3) şi (3.32.5), E_6 nu poate tăia pe E_1, E_2, E_3 sau E_7; E_5 nu poate tăia pe E_1, E_2, E_4, E_6 sau E_7; şi E_7 nu poate tăia pe E_1, E_3, E_4, E_5 sau E_6. Punînd $Z' = 3E_1 + 2E_2 + 2E_3 + 2E_4 + E_5 + E_6$ (adică ciclul fundamental pentru configuraţia (E_6)), atunci avem $(Z'^2) = -2$ şi $(Z' \cdot E_7) = 2$, de unde $((Z' + E_7)^2) = (Z'^2) + 2(Z' \cdot E_7) + (E_7^2) = -2 + 4 - 2 = 0$, adică matricea de intersecţie nu este definită negativ.

Cu aceasta demonstraţia teoremei (3.32) este completă.

(3.33) *Referinţe bibliografice.* Acest paragraf are drept principale surse Artin [1] şi [2]. Metoda de a demonstra (3.12), (3.13) şi (3.14) aparţine autorului. Anumite demonstraţii (ca de exemplu (3.23), (3.24), şi (3.25)) au fost inspirate din Lipman [1].

§. 4.

PROPRIETĂŢI ALE SINGULARITĂŢILOR RAŢIONALE

(4.1) TEOREMĂ (Laufer-Ramanujam). *Fie* $f: X \to Y$ *o desingularizare a singularității normale* (Y, y), *cu* Y *suprafață afină,* $E_1, \dots E_n$ *componentele ireductibile ale fibrei reduse* $E = f^{-1}(y)_{\text{red}}$ *și* L *un* O_X*-modul inversibil astfel încît* $(L \cdot E_i) \geqslant (\omega_X \cdot E_i)$, $i = 1, \dots, n$. *Atunci* $H^1(X, L) = 0$.

Demonstrație. Fie I_i fascicolul inversibil de ideale al curbei E_i și punem $J = I_1 \otimes \dots \otimes I_n$ (fascicolul de ideale al lui $E = E_1 + \dots + E_n$).

Pasul 1. *Pentru orice* $h \geqslant 1$ *aplicația* $\sigma: H^1(X, J^h L) \to H^1(X, L)$ *indusă de incluziunea* $J^h L \subset L$ *este surjectivă.*

Demonstrația pasului 1. Deoarece matricea $\|(E_i \cdot E_j)\|$ este definită negativ (cf. (2.7)), putem alege succesiv componentele $E_{i_1}, \dots, E_{i_{hn}}$ după cum urmează: $(E_{i_1} \cdot D_1) < 0$, unde $D_1 = \sum_{i=1}^{n} hE_i$; fie $D_2 = D_1 - E_{i_1}$. În general, presupunînd D_j construit, fie E_{i_j} astfel încît $(E_{i_j} \cdot D_j) < 0$ și atunci punem $D_{j+1} = D_i - E_{i_j}$. Pentru orice j avem șirul exact

$$0 \to O_X(-D_j) \cdot L \to O_X(-D_{j+1}) \cdot L \to M_j \to 0$$

în care M_j este concentrat pe E_{i_j} și $\deg(M_j) = -(E_{i_j} \cdot D_{j+1}) + (L \cdot E_{i_j}) = -(E_{i_j} \cdot D_j) + (E_{i_j}^2) + (L \cdot E_{i_j})$. Însă prin ipoteza teoremei, $(L \cdot E_{i_j}) \geqslant (\omega_X \cdot E_{i_j}) = \deg(\omega_{E_{i_j}}) - (E_{i_j}^2)$, și prin urmare obținem $\deg(M_j) > \deg(\omega_{E_{i_j}})$. Deci prin dualitatea Serre pe E_{i_j} avem $H^1(X, M_j) = H^1(E_{i_j}, M_j) = H^0(E_{i_j}, M_j^{-1} \otimes \omega_{E_{i_j}}) = 0$, deoarece $\deg(M_j^{-1} \otimes \omega_{E_{i_j}}) < 0$. Rezultă deci că omomorfismul

$\sigma_j : H^1(X, O_X(-D_j) \cdot L) \to H^1(X, O_X(-D_{j+1}) \cdot L)$ este surjectiv. Deoarece $D_{hn+1} = 0$, omomorfismul σ este surjectiv, fiind compunerea $\sigma_{hn} \circ \ldots \circ \sigma_1$.

Pasul 2. Există un întreg $h \geqslant 1$ astfel încît aplicația de la pasul 1 să fie omomorfismul nul.

Demonstrația pasului 2. Dacă $\tau_i : H^1(X, m^i L) \to H^1(X, L)$ este aplicația indusă de incluziunea $m^i L \subset L$ (unde m este idealul maximal corespunzător punctului y pe Y), și dacă V_i este imaginea lui τ_i, obținem filtrarea $V_1 \supseteq V_2 \supseteq \ldots$ a lui $H^1(X, L)$. Deoarece $H^1(X, L)$ este finit dimensional ($H^1(X, L) = R^1 f_*(L)$ deoarece Y este afină, și $R^1 f_*(L)$ este un O_Y-modul coerent concentrat cel mult în punctul y, deoarece f este desingularizare), există un $h_1 \geqslant 1$ astfel încît $V_{h_1} = V_{h_1+1} = \ldots = V$.

Pe de altă parte, după EGA III 3.3.2, există un $h_2 \geqslant 1$ astfel încît $V_{h_2+r} = m^r V_{h_2}$ pentru orice $r \geqslant 1$ (fiecare $a \in m^r$ induce prin multiplicare aplicația $m^i L \to m^{i+r} L$, și deci aplicația $H^1(X, m^i L) \to H^1(X, m^{i+r} L)$). În particular, obținem $V = mV$, și după lema lui Nakayama, $V = 0$. Cu alte cuvinte, punînd $h' = \max(h_1, h_2)$, aplicația $\tau_{h'}$ este nulă. În fine, deoarece mO_X este fasciculul de ideale ce definește fibra $f^{-1}(y)$ (în general mO_X este neinversibil), există un $s \geqslant 1$ astfel încît $J^s \subseteq mO_X$. Demonstrația pasului 2 se încheie luînd $h = sh'$.

Demonstrația teoremei (4.1) se obține combinînd pașii 1 și 2.

Remarcăm că demonstrația de mai sus aparține lui Laufer [1], mai puțin argumentarea algebrică a pasului 2 (care face demonstrația lui Laufer valabilă în orice caracteristică). O altă demonstrație a teoremei (4.1) se poate găsi în Ramanujam [1].

(4.2) LEMĂ. *Fie (Y, y) o singularitate normală cu Y suprafață afină. Atunci completatul m-adic $\hat{O}_{Y,y}$ al inelului local $O_{Y,y}$ al lui (Y, y) este normal. În plus, dacă $f : X \to Y$ este o desingularizare a lui (Y, y), atunci $\hat{f} : \hat{X} = X \times_Y \operatorname{Spec} \hat{O}_{Y,y} \to \operatorname{Spec} \hat{O}_{Y,y} = \hat{Y}$ este o desingularizare a lui (Y, y), cu y punctul închis al lui Y, incluziunile $f^{-1}(y) \hookrightarrow X$ și $\hat{f}^{-1}(\hat{y}) \hookrightarrow \hat{X}$ sînt formal echivalente și $H^1(X, O_X) \otimes \hat{O}_{Y,y} \cong H^1(\hat{X}, O_{\hat{X}})$.*

Demonstrație. După teorema Zariski-Abhyankar există o desingularizare $f : X \to Y$ a lui (Y, y). Deoarece pătratul

$$\begin{array}{ccc} \hat{X} & \xrightarrow{v} & X \\ {\scriptstyle \hat{f}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f} \\ \hat{Y} & \xrightarrow{u} & Y \end{array}$$

este cartezian şi u este morfism fidel plat, rezultă formula $H^1(X, O_X) \otimes$ $\otimes \hat{O}_{Y,y} \cong H^1(\hat{X}, O_{\hat{X}})$ (vezi EGA III 1.4.15). În plus, fibrele $f^{-1}(y)$ şi $\hat{f}^{-1}(\hat{y})$ se identifică în mod canonic via morfismul v, iar scufundările $f^{-1}(y) \hookrightarrow x$ şi $\hat{f}^{-1}(y) \hookrightarrow \hat{X}$ sînt formal echivalente. Presupunem pentru moment că am dovedit că $\hat{X}$ este schemă nesingulară. Atunci deoarece $H^0(X, O_X) \otimes \hat{O}_{Y,y} = H^0(\hat{X}, O_{\hat{X}})$ (*loc. cit.*), avem $H^0(\hat{X}, O_{\hat{X}}) = \hat{O}_{Y,y}$ şi deci $\hat{O}_{Y,y}$ este normal. Rămîne deci de dovedit că $f: \hat{X} \to \hat{Y}$ este o desingularizare a lui $(\hat{Y}, \hat{y})$. Deoarece f este izomorfism între $X - f^{-1}(y)$ şi $Y - y$, $\hat{f}$ este de asemenea izomorfism între $\hat{X} - f^{-1}(\hat{y})$ şi $\hat{Y} - \hat{y}$. Fie acum $\hat{x} \in \hat{X}$ un punct închis arbitrar. Dacă arătăm că inelul local $O_{\hat{X},\hat{x}}$ este regulat, este clar că X este schemă nesingulară. Deoarece f este propriu, $\hat{f}$ este de asemenea propriu, deci $\hat{f}(\hat{x}) = \hat{y}$. În particular, $k(\hat{x}) = k(\hat{y}) = k(y) = k($ k fiind algebric închis). Fie $x = v(\hat{x})$. Atunci deoarece $v^{-1}(x) = \hat{X} \otimes_X k(x) = \hat{Y} \otimes_Y k(y) =$ Spec $(\hat{O}_{Y,y}/m_y\hat{O}_{Y,y}) =$ Spec $k(y) =$ Spec k, rezultă $m_{X,x} O_{\hat{X},\hat{x}} = m_{\hat{X},\hat{x}}$. Cum v este plat, inelul local $O_{\hat{X},\hat{x}}$ este regulat deoarece $O_{X,x}$ are această proprietate. Q.E.D.

(4.3) Definiţie. Fie X o suprafaţă nesingulară (nu neapărat proiectivă) şi C o curbă integră pe X. Vom spune că C este *curbă excepţională de prima specie* dacă C este proiectivă, $p_a(C) = 0$ şi $(C^2) = -1$ (în general are sens indicele de intersecţie $(C_1 \cdot C_2)$ a două curbe C_1 şi C_2 situate pe o suprafaţă nu neapărat proiectivă, cu condiţia ca una din ele să aibă toate componentele proiective).

Dacă C este o curbă excepţională de prima specie pe suprafaţa nesingulară X, atunci există o unică suprafaţă nesingulară Y şi un morfism notat $\mathrm{cont}_C : X \to Y$ cu proprietăţile: cont_C este morfism propriu, contractă curba C la un punct şi este izomorfism în afara curbei C. Acest fapt este o consecinţă imediată a teoremei (3.30), faptul că X nu este proiectivă nefiind un impediment (putem completa suprafaţa X la una proiectivă $\widetilde{X}$ şi a aplica teorema (3.30) acesteia din urmă; într-adevăr, chiar dacă $\widetilde{X}$ are singularităţi la infinit acest lucru nu contează).

(4.4) Definiţie. Fie $f: X \to Y$ o desingularizare a singularităţii normale (Y, y) de dimensiune 2. Vom spune că f este o *desingularizare minimală* dacă fibra redusă $f^{-1}(y)_{red} = E$ nu conţine componente care să fie curbe excepţionale de prima specie.

Observăm că orice asemenea singularitate (Y, y) posedă cel puţin o desingularizare minimală. Într-adevăr, dacă $f: X \to Y$ este

o desingularizare arbitrară a lui (Y, y) şi care nu este minimală, fie E_1 o componentă a lui E care este curbă excepţională de prima specie. Atunci suprafaţa nesingulară $\mathrm{cont}_{E_1}(X)$ domină pe Y, deci obţinem o desingularizare $f_1 : \mathrm{cont}_{E_1}(X) = X_1 \to Y$. Dacă f_1 este minimală am terminat. Dacă nu, observăm mai întîi că fibra $f_1^{-1}(y)$ conţine $n - 1$ componente, unde n este numărul componentelor lui E. Se repetă procedeul de mai sus şi după un număr finit de paşi se ajunge cu siguranţă la o desingularizare minimală a lui (Y, y). Importanţa desingularizărilor minimale rezultă din următoarea propoziţie:

(4.5) PROPOZIŢIE. *Dacă (Y, y) este o singularitate a suprafeţei normale Y, atunci există o desingularizare minimală $f : X \to Y$ a lui (Y, y). În plus, pentru orice altă desingularizare $f' : X' \to Y$ există un morfism unic $u : X' \to X$ astfel încît $f \circ u = f'$. În particular, orice două desingularizări minimale ale lui (Y, y) sînt canonic izomorfe. În fine, dacă f este minimală şi fibra sa redusă E are componentele ireductibile $E_1, \ldots, E_n$, atunci $(\omega_X \cdot E_i) \geqslant 0$ pentru orice $i = 1, \ldots, n$.*

Demonstraţie. Existenţa lui f a fost probată mai sus. Fie acum $u = f^{-1} \circ f'$. Atunci u este un morfism biraţional. Ţinînd cont de structura morfismelor biraţionale între două suprafeţe proiective X' şi X (într-adevăr, X' şi X pot fi presupuse a fi proiective, deoarece Y poate fi presupusă — fără a restrînge generalitatea — proiectivă, iar morfismele f' şi f sînt de asemenea proiective), există un morfism $v : X'' \to X'$ care este compunere de un număr finit de transformări pătratice astfel încît $u \circ v$ să fie morfism. Alegem pe v astfel încît în compunerea sa să intre un număr minim de transformări pătratice. Trebuie demonstrat că acest număr este zero, adică u este un morfism. Dacă, prin absurd, acest număr ar fi > 0, atunci ar exista pe X'' o curbă excepţională de prima specie E'' ce ar fi conţinută în fibra $(f' \circ v)^{-1}(y)$. Dacă $(u \circ v)(E'')$ ar fi un punct, atunci $\mathrm{cont}_{E''}(X'')$ ar domina pe X (şi pe X') şi astfel s-ar contrazice minimalitatea lui v. Deci $(u \circ v)(E'')$ este o componentă — să zicem E_1 — a fibrei $f^{-1}(y)$. Cum $u \circ v$ este un morfism biraţional, $u \circ v$ este o compunere de un număr finit de transformări pătratice. Cum prin ipoteză f este minimală, $(E_1^2) \leqslant -2$, şi cum transformata proprie a unei curbe C printr-o transformare pătratică are autointersecţia mai mică sau egală decît (C^2), rezultă deci că $(E''^2) \leqslant -2$, ceea ce contrazice faptul că E'' este curbă excepţională de prima specie.

În fine, din relaţia (formula de adjuncţie)

$$(\omega_X \cdot E_i) = 2p_a(E_i) - 2 - (E_i^2)$$

şi din faptul că $(E_i^2) < 0$ (cf. (2.7)) combinat cu inegalitatea $p_a(E_i) \geqslant 0$, rezultă că $(\omega_X \cdot E_i)$ ar putea fi < 0 dacă şi numai dacă $p_a(E_i) = 0$ şi $(E_i^2) = -1$, adică E_i ar fi curbă excepţională de prima specie. Q.E.D.

(4.6) TEOREMĂ. *Fie (Y, y) o singularitate normală, cu Y suprafaţă afină. Atunci (Y, y) este o singularitate raţională dacă şi numai dacă grupul claselor de divizori al completatului m_y-adic $\hat{O}_{Y,y}$ al inelului local $O_{Y,y}$ este un grup finit. În acest caz ordinul său coincide cu determinantul d (în valoare absolută) al matricei de intersecţie $\|(E_i \cdot E_j)\|$.*

Demonstraţie. După (4.2) putem înlocui (Y, y) cu $(\hat{Y}, \hat{y})$, unde $\hat{Y} =$ Spec $\hat{O}_{Y,y}$, deci putem presupune, fără a restrînge generalitatea, că $Y =$ Spec (A) cu A inel local noetherian, normal, de dimensiune 2 şi complet în topologia idealului maximal, care posedă o desingularizare $f: X \to Y$. În plus, ţinînd cont de (4.5) putem presupune că fibra redusă $E = f^{-1}(y)_{\text{red}}$ nu conţine curbe excepţionale de prima specie, adică f este desingularizare minimală. Fie Z unicul ciclu de suport conţinut în E astfel încît $(Z \cdot E_i) = -(\omega_X \cdot E_i) \cdot d$, $i = 1, \ldots, n$, (matricea $\|(E_i \cdot E_j)\|$ este definită negativ). Deoarece din (4.5) avem $(\omega_X \cdot E_i) \geqslant 0$, rezultă că $Z > 0$ (cf. demonstraţiei lui (3.9)) şi deci Z majorează ciclul fundamental al lui E. În particular, suportul lui Z este E.

Deoarece A este complet, omomorfismul natural de restricţie $\text{Pic}(X) \to \text{Pic}(X_E)$ este un izomorfism, unde prin X_E am notat completatul formal al lui X de-a lungul lui E (vezi EGA III 5.1.4). Însă $\text{Pic}(X_E)$ se identifică în mod natural cu $\varprojlim_m \text{Pic}\,(mZ)$, în care omomorfismele sistemului proiectiv de mai sus sînt cele de restricţie. (vezi Hartshorne [3], chap. IV şi EGA III chap. 0, 13.3.1). Însă considerînd şirul exact standard $(m \geqslant 1)$

$$0 \to O_X(-mZ) \otimes O_Z \to O^*_{(m+1)Z} \to O^*_{mZ} \to 1.$$

rezultă şirul exact de coomologie

$$H^1(O_X(-mZ) \otimes O_Z) \to \text{Pic}((m+1)Z) \to \text{Pic}(mZ) \to H^2(O_X(-mZ) \otimes O_Z)$$

Dar deoarece $(O_X(-mZ) \cdot E_i) = -m(Z \cdot E_i) = md(\omega_X \cdot E_i) \geqslant (\omega_X \cdot E_i)$ pentru orice i, din (4.1) rezultă $H^1(O_X(-mZ)) = 0$ şi deci primul grup de coomologie din şirul exact de mai sus este trivial. Cum orice H^2 se anulează pe Z, rezultă că toate omomorfismele sistemului proiectiv de mai sus sînt izomorfisme. În concluzie

rezultă că omomorfismul natural de restricție $\mathrm{Pic}(X) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Pic}(Z)$ este un izomorfism.

Pe de altă parte, deoarece X este schemă nesingulară, avem echivalență între divizorii Weil și divizorii Cartier pe X, de unde rezultă imediat că omomorfismul de restricție $\mathrm{Pic}(X) \to \mathrm{Pic}(U)$, cu $U = X - E = Y - y$, este surjectiv și nucleul său este generat de clasele fasciculelor inversibile $O_X(E_1), \ldots, O_X(E_n)$. Ținînd cont de toate aceste fapte și de izomorfismele de mai sus, rezultă că $\mathrm{Pic}(U)$ se poate identifica cu $\mathrm{Pic}(mZ)/H$, unde $m \geqslant 1$ este arbitrar, iar H este subgrupul lui $\mathrm{Pic}(mZ)$ generat de clasele fasciculelor inversibile $O_X(E_i) \otimes O_{mZ}$. Însă cum A este normal și de dimensiune > 1. $\mathrm{Pic}(U)$ se identifică de asemenea cu grupul claselor de divizori al lui A. În diagrama comutativă cu liniile exacte

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & H & \longrightarrow & \mathrm{Pic}(mZ) & \longrightarrow & \mathrm{Pic}(U) & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow{\scriptstyle \delta'}\wr & & \downarrow{\scriptstyle \delta} & & \downarrow{\scriptstyle \delta''} & & \\
0 & \longrightarrow & \delta(H) & \longrightarrow & \mathbb{Z}^n & \longrightarrow & \mathbb{Z}^n/\delta(H) & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

omomorfismul δ' este izomorfism deoarece matricea $\|(E_i \cdot E_j)\|$ este definită negativ. Deci $\mathrm{Ker}\,(\delta) = \mathrm{Ker}(\delta'')$.

Presupunînd acum $\mathrm{Pic}(U)$ finit, rezultă $\mathrm{Ker}(\delta)$ finit și după (3.4) și (3.3), $H^1(O_{mZ}) = 0$ pentru orice $m \geqslant 1$, și deci, ținînd cont de teorema lui Zariski a funcțiilor olomorfe, $H^1(O_X) = 0$. Altfel spus, (Y, y) este singularitate rațională.

Reciproc, presupunînd (Y, y) singularitate rațională, atunci δ este izomorfism după (3.4), și (3.3), și deci δ'' este de asemenea izomorfism. Altfel spus, $\mathrm{Pic}(U)$ se identifică cu conucleul următorului omomorfism de grupuri libere de rang n : $\mathbb{Z}E_1 \oplus \ldots \oplus \mathbb{Z}E_n = H \to \mathbb{Z}^n$, $E_i \mapsto ((E_i \cdot E_1), \ldots, (E_i \cdot E_n))$. De aici rezultă că $\mathrm{Pic}(U)$ este finit de ordin egal cu modulul determinantului matricei de intersecție $\|(E_i \cdot E_j)\|$. Q.E.D.

(4.7) Corolar. *Fie (Y, y) o singularitate normală a suprafeței afine Y, astfel încît completatul m_y-adic al lui $O_{Y,y}$ să fie factorial. Atunci (Y, y) este singularitate rațională.*

(4.8) Fie acum (Y, y) o singularitate normală izolată de dimensiune $d \geqslant 2$ a unei varietăți afine $Y = \mathrm{Spec}(A)$ și nesingulare în afara lui y. Presupunem că (Y, y) admite o desingularizare $f : X \to Y$, adică un morfism proiectiv f astfel încît : a) Fibra redusă $E = f^{-1}(y)_{\mathrm{red}}$ este o submulțime (închisă) de codimensiune pură 1 în X și avînd componentele ireductibile $E_1, \ldots, E_n$, b) X este varietate nesingulară, și c) f este izomorfism între $X - E$ și $Y - y$.

După rezultatele lui Hironaka [1] o asemenea desingularizare există întotdeauna în caracteristică zero. Dacă $d = 2$, (Y, y) admite, după cum am remarcat deja, o desingularizare peste orice corp algebric închis de caracteristică arbitrară. Fie m idealul maximal al lui A corespunzător punctului y. Dacă M este un A-modul, vom nota prin $\hat{M}$ completatul m-adic al lui M. Dacă N este un k-spațiu vectorial, atunci prin N' vom nota dualul algebric al lui N, adică $N' = \mathrm{Hom}_k(N, k)$. De asemenea, dacă L este un O_Z-modul local liber de rang finit (cu Z schemă arbitrară), atunci $\check{L}$ va însemna dualul lui L, adică $\check{L} = \mathscr{H}om_{O_Z}(L, O_Z)$.

(4.9) Teoremă. *În notațiile de mai sus, presupunem că singularitatea normală izolată (Y, y) de dimensiune $d \geqslant 2$ admite desingularizarea $f: X \to Y$. Atunci pentru orice O_X-modul local liber L de rang finit și pentru orice $p \geqslant 0$, există un izomorfism natural de k-spații vectoriale între $H^p_E(X, L)$ (coomologia locală cu suport în $E = f^{-1}(y)_{\mathrm{red}}$) și $(H^{d-p}(X, \check{L} \otimes \omega_X)^{\wedge})'$. Dacă $p < d$, spațiile $H^{d-p}(X, \check{L} \otimes \omega_X)$ sînt finit dimensionale, și în acest caz izomorfismul de mai sus devine $H^p_E(X, L) \cong H^{d-p}(X, \check{L} \otimes \omega_X)'$.*

Demonstrație. Deoarece L este local liber avem $H^0_E(X, L) = 0$, și deoarece $d > \dim(E)$ avem de asemenea $H^d(X, \check{L} \otimes \omega_X) = 0$. Putem deci presupune $p > 0$. Deoarece Y este afină iar f este morfism propriu și izomorfism în afara lui y, $H^{d-p}(X, \check{L} \otimes \omega_X)$ este finit dimensional dacă $p < d$ (deoarece coincide cu $R^{d-p}f_*(\check{L} \otimes \omega_X)$), deci $H^{d-p}(X, \check{L} \otimes \omega_X)^{\wedge} = H^{d-p}(X, \check{L} \otimes \omega_X)$.

Presupunînd acum $p > 0$, avem, după Grothendieck [4], teorema (2.8):

$$(4.9.1) \qquad H^p_E(X, L) = \varinjlim_m \mathrm{Ext}^p_{O_X}(O_{mE}, L),$$

unde $O_{mE} = O_X/I^m$ cu $I = O_X(-E)$ idealul lui E în O_X. Acum vom folosi următoarea lemă:

(4.10) Lemă. *Fie D un divizor efectiv pe X definit de idealul $J \subset O_X$. Atunci pentru orice O_X-modul local liber L de rang finit, există un izomorfism canonic $H^{p-1}(D, L \otimes J^{-1} \otimes O_D) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Ext}^p_{O_X}(O_D, L)$ pentru orice $p > 0$.*

Presupunînd pentru moment lema (4.10), izomorfismul (4.9.1) devine:

$$(4.9.2) \qquad H^p_E(X, L) = \varinjlim_m H^{p-1}(mE, L \otimes I^{-m} \otimes O_{mE}).$$

Însă $\omega_X \otimes I^{-m} \otimes O_{mE}$ este izomorf cu fasciculul dualizant ω_{mE} (după (3.11.5)). Aplicînd teorema de dualitate Grothendieck-Serre pe schema proiectivă şi Cohen-Macaulay mE, obţinem :

$$\begin{aligned} H^p_E(X, L) &= \varinjlim_m H^{p-1}(mE, L \otimes \omega_X^{-1} \otimes \omega_{mE}) = \\ &= \varinjlim_m H^{(d-1)-(p-1)}(mE, \check{L} \otimes \omega_X \otimes O_{mE})' = \\ &= (\varprojlim_m H^{d-p}(mE, \check{L} \otimes \omega_X \otimes O_{mE}))' . \end{aligned}$$

Acum, după teorema lui Zariski a funcţiilor olomorfe (EGA III 4.2.1), ultimul spaţiu vectorial coincide cu dualul completatului m-adic al lui $H^{d-p}(X, \check{L} \otimes \omega_X)$. Teorema (4.9) este demonstrată modulo lema (4.10).

Demonstraţia lemei (4.10). Considerăm şirul spectral asociat compunerii de Ext'uri (cf. Altman-Kleiman [1], IV (2.9.1)) :

$$E_2^{pq} = \mathrm{Ext}^p_{O_D}(O_D, \mathscr{E}xt^q_{O_X}(O_D, L)) \Rightarrow \mathrm{Ext}^{p+q}_{O_X}(O_D, L).$$

Deoarece O_D admite rezoluţia $0 \to J \to O_X \to O_D \to 0$, rezultă că pentru orice $q \geqslant 2$, $\mathscr{E}xt^q_{O_X}(O_D, L) = 0$. Pe de altă parte, deoarece L este local liber, avem de asemenea $\mathscr{E}xt^0_{O_X}(O_D, L) = \mathscr{H}om_{O_X}(O_D, L) = 0$, şi deci $E_2^{pq} = 0$ pentru orice $q \neq 1$. Altfel spus, şirul spectral de mai sus degenerează şi deci pune în evidenţă izomorfismele :

$$H^{p-1}(D, \mathscr{E}xt^1_{O_X}(O_D, L)) = \mathrm{Ext}^{p-1}_{O_D}(O_D, \mathscr{E}xt^1_{O_X}(O_D, L)) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Ext}^p_{O_X}(O_D, L).$$

Însă după o identificare de tipul (3.11.5) (vezi Altman-Kleiman [1], I (2.4)), $\mathscr{E}xt^1_{O_X}(O_D, L) \cong L \otimes J^{-1} \otimes O_D$, fapt ce încheie demonstraţia lemei (4.10).

(4.11) Corolar. *În notaţiile teoremei* (4.1), *dacă Y este suprafaţă, avem* $H^1(X, \omega_X) = 0$ *şi* $H^1_E(X, M) = 0$ *pentru orice O_X-modul inversibil M astfel încît* $(M \cdot E_i) \leqslant 0$ *pentru orice* $i = 1, \ldots, n$.

Demonstraţie. Prima afirmaţie rezultă direct din teorema (4.1). Pe de altă parte, din (4.9) rezultă $\dim H^1_E(X, M) = \dim H^1(X, M^{-1} \otimes \omega_X)$. Dar deoarece $(M \cdot E_i) \leqslant 0$, $(M^{-1} \otimes \omega_X \cdot E_i) \geqslant (\omega_X \cdot E_i)$ pentru orice $i = 1, \ldots, n$, şi deci după (4.1) $H^1(X, M^{-1} \otimes \omega_X) = 0$.

(4.12) COROLAR. *În notațiile corolarului* (4.11), *pentru orice* O_X*-modul inversibil* L *astfel încît* $(L \cdot E_i) \geqslant (\omega_X \cdot E_i)$, $(i = 1, \ldots, n)$, *are loc șirul exact*

$$0 \to H^0(X, L) \to H^0(X - E, L) \to H^1(X, L^{-1} \otimes \omega_X)' \to 0.$$

În particular, $\dim H^1(X, O_X) = \dim H^0(X - E, \omega_X)/H^0(X, \omega_X)$, *și deci* (Y, y) *este singularitate rațională dacă și numai dacă orice secțiune a lui* ω_X *din* $X-E$ *se poate prelungi la o secțiune pe întregul* X.

Demonstrație. Șirul exact din enunț se deduce din șirul exact de coomologie locală

$$0 \to H^0(X, L) \to H^0(X - E, L) \to H^1_E(X, L) \to H^1(X, L)$$

ținînd cont că $H^1(X, L) = 0$ (cf. (4.1)) și $H^1_E(X, L) = H^1(X, L^{-1} \otimes \omega_X)'$ (cf. (4.9)). Ultima afirmație se obține luînd $L = \omega_X$ și folosind corolarul precedent.

(4.13) În notațiile corolarului (4.12), dacă L este un O_X-modul local liber de rang finit, atunci șirul exact (obținut din șirul exact de coomologie locală combinat cu teorema (4.9)):

$$0 \to \Gamma(X, L) \to \Gamma(X - E, L) \to H^1(X, \check{L} \otimes \omega_X)' \to H^1(X, L)$$

arată că $\Gamma(X - E, L)/\Gamma(X, L)$ este un spațiu vectorial finit dimensional și în plus $\dim (\Gamma(X - E, L)/\Gamma(X, L)) = \dim \operatorname{Ker} (H^1(X, \check{L} \otimes \omega_X)' \to H^1(X, L)) = \dim \operatorname{Ker} (R^1f_*(\check{L} \otimes \omega_X)' \to R^1f_*(L))$. De aici deducem că $\dim (\Gamma(X - E, L)/\Gamma(X, L))$ nu depinde de Y în sensul următor: dacă Y' este un deschis afin în Y ce conține punctul y și dacă $X' = f^{-1}(Y')$, atunci

(4.13.1) $\dim (\Gamma(X - E, L)/\Gamma(X, L)) = \dim (\Gamma(X' - E, L)/\Gamma(X', L))$.

Pe de altă parte, fie $g : \tilde{X} \to X$ eclatarea lui X de centru punctul (redus) $u \in E$, și fie C curba excepțională $g^{-1}(u)$ definită de idealul inversibil J în $O_{\tilde{X}}$. Pentru orice $s \geqslant 0$ punem $L_s = g^*(L) \otimes J^{-s}$. Atunci după formula proiecției $g_*(L_s) \cong L \otimes g_*(J^{-s}) \cong L$, deoarece pentru orice $s \geqslant 0$ avem $g_*(J^{-s}) \cong O_X$. (*Demonstrație*: problema fiind locală în jurul lui u, putem presupune că X este afină. Folosim inducție după s, cazul $s = 0$ fiind clar; în general, șirul exact $0 \to J^{-s+1} \to J^{-s} \to O_C(-s) \to 0$ arată că aplicația $\Gamma(\tilde{X}, J^{-s+1}) \to \Gamma(\tilde{X}, J^{-s})$ este un izomorfism, deoarece dacă $s > 0$, $\Gamma(C, O_C(-s)) = 0$. Prin urmare

obținem $\Gamma(X - E, L) \cong \Gamma(\widetilde{X} - \widetilde{E} \cup C, L_s)$ și $\Gamma(X, L) \cong \Gamma(\widetilde{X}, L_s)$, $\widetilde{E}$ fiind transformata proprie a curbei E prin g. Cu alte cuvinte, avem:

$$(4.13.2)\quad \dim(\Gamma(X - f^{-1}(y), L)/\Gamma(X, L)) = \dim(\Gamma(\widetilde{X} - (f \circ g)^{-1}(y), L_s)/\Gamma(X, L_s))$$

Dacă $L = \omega_X$, avem formula bine cunoscută $g^*(\omega_X) \otimes J^{-1} = \omega_{\widetilde{X}}$ și deci pentru orice $q \geqslant 1$, $g^*(\omega_X^q) \otimes J^{-q} = \omega_{\widetilde{X}}^q$. Din discuția de mai sus rezultă că pentru fiecare $q \geqslant 1$, numărul

$$(4.13.3)\qquad r_y(q) = \dim(\Gamma(X - E, \omega_X^q)\Gamma/(X, \omega_X^q))$$

este un invariant numeric al singularității (Y, y) (ca să arătăm că nu depinde de alegerea desingularizării se folosește și faptul că orice altă desingularizare a lui (Y, y) se obține din f printr-o compunere de transformări pătratice sau de inverse de acestea). În cazul complex-analitic invariații $r_y(q)$ $(q \geqslant 1)$ au fost introduși și studiați de Laufer [1] și Knöller [1].

Indicăm acum alte consecințe ale teoremelor (4.1) și (4.9).

(4.14) COROLAR. *Fie (Y, y) o singularitate normală cu Y suprafață afină, și fie $f: X \to Y$ desingularizarea minimală a lui (Y, y) (cf. 4.5)). Atunci $H^1(X, \omega_X^q) = 0$ și $r_y(q) = \dim H^1(X, \omega_X^{1-q})$ pentru orice $q \geqslant 1$.*

Demonstrație. După (4.5) $(\omega_X \cdot E_i) \geqslant 0$ pentru orice i, deci $(\omega_X^q \cdot E_i) \geqslant (\omega_X \cdot E_i)$ pentru orice i. Din (4.1) deducem $H^1(X, \omega_X^q) = 0$. Ultima formulă rezultă atunci din (4.12).

(4.15) COROLAR. *În notațiile corolarului precedent, (Y, y) este singularitate rațională dacă și numai dacă $r_y(1) = 0$. Dacă (Y, y) este punct rațional dublu, atunci $r_y(q) = 0$ pentru orice $q \geqslant 1$. Reciproc, dacă y este un punct normal dar nu regulat pe Y și $r_y(1) = r_y(q_0) = 0$ pentru un $q_0 \geqslant 3$, atunci (Y, y) este punct rațional dublu.*

Demonstrație. Fie $f: X \to Y$ desingularizarea minimală a lui (Y, y). Prima afirmație rezultă din (4.14) și (4.12). Dacă (Y, y) este punct rațional dublu, atunci ținînd cont de (3.29) și (3.31), avem $p_a(E_i) = 0$ și $(E_i^2) = -2$, și deci $(\omega_X \cdot E_i) = 0$ pentru orice $i = 1, \ldots, n$. De aici rezultă (cf. (4.1)) $H^1(X, \omega_X^{1-q}) = 0$ și deci $r_y(q) = 0$ pentru orice $q \geqslant 1$.

Reciproc, $r_y(1) = 0$ înseamnă exact faptul că (Y, y) este singularitate rațională. Șirul exact $(q \geqslant 1, i = 1, \ldots, n)$

$$0 \to I_i \otimes \omega_X^{1-q} \to \omega_X^{1-q} \to (\omega_{E_i} \otimes I_i/I_i^2)^{1-q} = L_{i;q} \to 0$$

(I_i fiind idealul inversibil al lui E_i în X) pune în evidență șirul exact de coomologie:

$$H^1(X, \omega_X^{1-q}) \to H^1(E_i, L_{i,q}) \to H^2(X, I_i \otimes \omega_X^{1-q}) = 0$$

Din ipoteză rezultă, ținînd cont de (4.14), că primul grup de coomologie este zero pentru un $q_0 \geqslant 3$, de unde $H^1(E_i, L_{i,q_0}) = 0$. Pe de altă parte, deg $(L_{i,q_0}) = (1 - q_0) \cdot (-2 - (E_i^2)) \leqslant 0$ deoarece (Y, y) fiind singularitate rațională, $p_a(E_i) = 0$, iar f fiind desingularizarea minimală a lui (Y, y), avem de asemenea $(E_i^2) \leqslant -2$, pentru orice i. Dacă (Y, y) nu ar fi punct rațional dublu, atunci $-2 - (E_i^2) > 0$ pentru un i, deci deg $(L_{i,q_0}) \leqslant -2$ $(q_0 \geqslant 3)$. Cum E_i este izomorfă cu dreapta proiectivă, acest fapt intră în contradicție cu trivialitatea lui $H^1(E_i, L_{i,q_0})$. Q.E.D.

(4.16) Fie (Y, y) o singularitate normală a suprafeței afine Y, și fie $f: X \to Y$ desingularizarea minimală a lui (Y, y). Dacă (Y, y) este singularitate Gorenstein, fasciculul dualizant ω_Y este inversibil (în jurul lui y); fie atunci $L = \omega_X \otimes f^*(\omega_Y)^{-1}$. Deoarece L este trivial în $X - E$, L este în mod necesar de forma $L \cong I_1^{\alpha_1} \otimes \ldots \otimes I_n^{\alpha_n}$, unde ca și mai sus $I_i = O_X(-E_i)$, iar $\alpha_i \in \mathbb{Z}$ $(i = 1, \ldots, n)$. Însă deoarece $(L \cdot E_i) = (\omega_X \cdot E_i) - (f^*(\omega_Y) \cdot E_i) = (\omega_X \cdot E_i) \geqslant 0$ (cf. (4.5) deoarece f este minimală), rezultă că $\alpha_i \geqslant 0$ pentru orice i (vezi demonstrația teoremei (3.9)). Obținem deci:

(4.16.1) $$\omega_X \cong f^*(\omega_Y) \otimes I_1^{\alpha_1} \otimes \ldots \otimes I_n^{\alpha_n}, \qquad \alpha_i \geqslant 0.$$

Înlocuind la nevoie pe Y cu un deschis afin mai mic ce conține pe y și în care ω_Y este trivial, formula (4.16.1) devine:

(4.16.2) $$\omega_X \cong I_1^{\alpha_1} \otimes \ldots \otimes I_n^{\alpha_n}, \qquad \alpha_i \geqslant 0.$$

Considerăm atunci divizorul efectiv $D = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i E_i$. Dacă $D = 0$, atunci ω_Y este trivial și formula de adjuncție împreună cu (3.31) implică faptul că (Y, y) este punct rațional dublu.

Presupunem acum $D > 0$. Atunci, după cum este imediat de văzut, $\alpha_i > 0$ pentru orice i. După (3.11.5) fasciculul dualizant ω_D al curbei D este dat de formula:

(4.16.3) $$\omega_D \cong \omega_X \otimes \omega_X^{-1} \otimes O_D \cong O_D.$$

Şirul exact $0 \to \omega_X \to O_X \to O_D \to 0$ pune în evidenţă şirul exact de coomologie:

$$(4.16.4) \qquad 0 \to \Gamma(X, \omega_X) \to \Gamma(X, O_X) \to \Gamma(D, O_D) \to$$
$$\to H^1(X, \omega_X) = 0 \to H^1(X, O_X) \to H^1(D, O_D) \to 0.$$

care arată că $r_y(1) = \dim H^1(D, O_D) = \dim \Gamma(D, O_D) > 0$ (folosind dualitatea pe D).

Reciproc, presupunem că (Y, y) este o singularitate normală astfel încît, dacă $f: X \to Y$ este desingularizarea sa minimală, atunci există un divizor efectiv $D > 0$ de suport egal cu E, al cărui fascicul dualizant ω_D este trivial. Vom demonstra că atunci (Y, y) este singularitate Gorenstein. Într-adevăr, şirul exact (cu $I = O_X(-D)$)

$$0 \to \omega_X \to \omega_X \otimes I^{-1} \to \omega_D \cong O_D \to 0$$

induce şirul exact de coomologie:

$$\Gamma(X, \omega_X \otimes I^{-1}) \to \Gamma(D, O_D) \to H^1(X, \omega_X) = 0 \quad ((4.11)).$$

Rezultă că există o secţiune $s \in \Gamma(X, \omega_X \otimes I^{-1})$ astfel încît $s/D = 1$. Cum $\mathrm{Supp}(D) = E$ deducem că într-o vecinătate U de forma $U = f^{-1}(V)$, cu V vecinătate deschisă afină convenabilă a lui y în Y, avem $\omega_X/U \cong O_X(-D)/U$. Deoarece putem presupune că $V - y$ este nesingulară şi $U - E \cong V - y$, rezultă că $\Omega^2_{Y/k}/V - y \cong O_Y/V - y$. După (3.13), (Y, y) este atunci singularitate Gorenstein.

Dacă $D' > 0$ este un alt divizor strict pozitiv cu $\mathrm{Supp}(D') = E$ şi al cărui fascicul dualizant $\omega_{D'}$ este trivial, atunci argumentul de mai sus arată că, cel puţin într-o vecinătate a lui E, avem $\omega_X \cong O_X(-D')$, de unde $O_X(D) \cong O_X(D')$. Deoarece suporturile lui D şi D' sînt E şi matricea de intersecţie $\|(E_i \cdot E_j)\|$ este definită negativ, acest izomorfism implică deja $D = D'$. În fine, ţinînd cont de (3.31), discuţia de mai sus conduce la:

(4.17) Teoremă. *Fie (Y, y) o singularitate normală de dimensiune 2 astfel încît y nu este punct regulat pe Y, şi fie $f: X \to Y$ desingularizarea minimală a lui (Y, y) cu $E = f^{-1}(y)_{\mathrm{red}}$ de componente ireductibile $E_1, \ldots, E_n$. Atunci (Y, y) este singularitate Gorenstein dacă şi numai dacă una din următoarele două situaţii are loc:*

i) (Y, y) este punct raţional dublu.

ii) Există un divizor strict pozitiv $D > 0$ astfel încît $\mathrm{Supp}(D) = E$ *şi al cărui facicul dualizant ω_D este trivial.*

În plus, dacă ii) are loc, divizorul D este unic determinat de faptul că ω_D este trivial, $r_y(1) = \dim\ \Gamma(D, O_D)$ *și* $\omega_X \cong f^*(\omega_Y) \otimes \otimes O_X(-D)$.

Divizorul D din situația ii) a teoremei (4.17) merită poate numele de divizorul Gorenstein al singularității (Y, y). În situația i) putem considera că divizorul Gorenstein este nul.

(4.18) COROLAR. a) *Dacă (Y, y) este o singularitate rațională Gorenstein, atunci multiplicitatea lui (Y, y) este* $\leqslant 2$.

b) *Dacă (Y, y) este o singularitate rațională al cărei inel local $O_{Y,y}$ este factorial, atunci multiplicitatea lui (Y, y) este* $\leqslant 2$.

Demonstrație. Prima afirmație rezultă direct din teorema (4.17) deoarece în situația ii) $r_y(1) = \dim\ \Gamma(D, O_D) > 0$. A doua afirmație rezultă din prima via teorema lui Murthy (3.14). Q.E.D.

Următorul rezultat reprezintă o caracterizare a punctelor raționale duble.

(4.19) COROLAR. *Dacă $f: X \to Y$ este desingularizarea minimală a singularității normale de dimensiune 2 (Y, y) (cu y punct care nu este regulat pe Y), următoarele afirmații sînt echivalente:*

a) *(Y, y) este punct rațional dublu.*

b) *(Y, y) este singularitate Gorenstein și* $f_*(\omega_X) \cong \omega_Y$.

c) *(Y, y) este singularitate rațională Gorenstein.*

Demonstrație. Echivalența dintre a) și b) a fost deja formulată în (4.18). Pe de altă parte, observăm că după (4.12), (Y, y) este singularitate rațională dacă și numai dacă $\Gamma(X - E, \omega_X) = \Gamma(X, \omega_X)$, fapt ce se mai poate scrie folosind (3.12), $f_*(\omega_X) \cong \omega_Y$ (anume, $\Gamma(X - E, \omega_X) \cong \Gamma(Y - y, \omega_Y) \overset{(3,12)}{=\!=} \Gamma(Y, \omega_Y)$). De aici rezultă echivalența dintre b) și c).

(4.20) COROLAR. *În ipotezele și notațiile teoremei (4.17), presupunem că are loc situația ii). Atunci pentru orice $q \geqslant 1$ are loc formula:*

$$r_y(q) = -(D^2) \cdot q(q-1)/2 + r_y(1).$$

Demonstrație. Micșorînd eventual pe Y, putem presupune că $\omega_X = O_X(-D)$, unde $f: X \to Y$ este desingularizarea minimală a lui (Y, y). Șirul exact

$$0 \to \omega_X^q \to \omega_X \otimes O_X(qD) = \omega_X^{1-q} \to \omega_{qD} \to 0$$

împreună cu (4.14) arată că $\dim H^1(X, \omega_X^{1-q}) = \dim H^1(qD, \omega_{qD})$, de unde folosind dualitatea pe curba qD, obținem $r_y(q) = \dim\ \Gamma(qD, O_{qD})$. Pe de altă parte, șirul exact

$$0 \to \omega_X^q \to O_X \to O_{qD} \to 0$$

şi (4.14) implică $\dim H^1(qD, O_{qD}) = \dim H^1(X, O_X) = r_y(1)$. Calculînd genul aritmetic al lui qD şi observînd că $-D$ este un divizor canonic pe X, avem :

$$1 - \chi(O_{qD}) = 1/2\ (qD \cdot (q-1)\, D) + 1,$$

de unde concluzia corolarului (4.20).

(4.21) *Exemple de singularităţi Gorenstein neraţionale.* O singularitate normală de dimensiune 2 (Y, y) se numeşte simplu-eliptică dacă în desingularizarea sa minimală $f: X \to Y$ fibra redusă $E = f^{-1}(y)_{red}$ este o curbă nesingulară şi eliptică. Astfel de singularităţi se pot obţine în felul următor : fie E o curbă eliptică arbitrară şi L un O_E-modul inversibil cu $\deg(L) > 0$ arbitrar. Punem $X = V(L)$ fibratul vectorial asociat lui E (vezi EGA II) şi scufundăm pe E în X prin secţiunea nulă, astfel încît — după cum este imediat de văzut — fasciculul conormal al lui E în X este izomorf cu L. După criteriul de contractibilitate a lui Grauert (EGA II, § 8) există un morfism propriu $f: X \to Y$ ce contractă pe E la un punct normal $y \in Y$ şi cu proprietatea că f este izomorfism între $X - E$ şi $Y - y$. Atunci (Y, y) este o singularitate simplu-eliptică, iar $f: X \to Y$ este desingularizarea sa minimală.

Deoarece clasa canonică a unei curbe eliptice E este trivială, rezultă după teorema (4.17) că orice singularitate simplu-eliptică este singularitate Gorenstein, avînd drept divizor Gorenstein pe E.

(4.22) Teoremă. *Fie (Y, y) o singularitate normală a suprafeţei afine Y astfel încît completatul m_y-adic al inelului local $O_{Y,y}$ să fie un inel factorial dar nu regulat. Atunci (Y, y) este punct raţional dublu, iar dacă $f: X \to Y$ este desingularizarea sa minimală, graful asociat fibrei reduse $E = f^{-1}(y)_{red}$ de componente $E_1, \ldots, E_n$ (cu $p_a(E_i) = 0$ şi $(E_i^2) = -2, i = 1, \ldots, n$) corespunde diagramei Dynkin (E_8) din teorema (3.32).*

Demonstraţia rezultă combinînd teorema (4.6), corolarul (4.18), teorema (3.32) şi faptul imediat că dintre cele cinci diagrame Dynkin din (3.32) numai (E_8) verifică condiţia că modulul dedeminatului matricei $\|(E_i \cdot E_j)\|$ este egal cu 1.

(4.23) *Referinţe bibliografice.* Teorema (4.1) a fost demonstrată în cazul $k = \mathbb{C}$ de Laufer [1] şi independent de Ramanujam [1] în cazul general. Demonstraţia dată aici urmează ideea lui Lipman, cu o modificare făcută de autor pentru a o face valabilă în orice caracteristică. Lema (4.2), teorema (4.6) şi corolarul (4.7) sînt luate din Lipman [1]. Teorema (4.9) împreună cu consecinţele sale şi teorema (4.17) au fost demonstrate de autor (cf. Bădescu [1]). Ideea folosirii invarianţilor numerici $r_y(q)$ provine de la Laufer [1] şi Knöller [1].

§ 5.

FORMULA LUI NOETHER, SCHEMA PICARD, VARIETATEA ALBANESE, PLURIGENURI

De acum încolo prin termenul „suprafață" vom înțelege o suprafață proiectivă și nesingulară X definită peste un corp algebric închis k de caracteristică arbitrară. Dacă vor apărea totuși și suprafețe cu singularități în anumite considerații, atunci acest lucru se va specifica (de exemplu : X este o suprafață normală ...).

Am văzut deja că dacă X este o suprafață și L un O_X-modul inversibil, atunci teorema Riemann-Roch se scrie :

$$\chi(L) = 1/2\,(L \cdot L \otimes \omega_X^{-1}) + \chi(O_X).$$

Sub o formă mai precisă, teorema Riemann-Roch exprimă $\chi\,(O_X)$ în funcție de clasele Chern ale suprafeței X. Mai exact, are loc formula lui Noether :

$$(*) \qquad \chi(O_X) = 1/12\,(c_1^2 + c_2) = 1/12\,((K^2) + c_2).$$

unde K este clasa canonică a lui X (corespunzătoare O_X-modulului inversibil ω_X). În plus, c_2 se dovedește a fi caracteristica euleriană a suprafeței X și este dat de formula

$$(**) \qquad c_2 = b_0 - b_1 + b_2 - b_3 + b_4,$$

unde $b_i (i = 0, 1, 2, 3, 4)$ sînt numerele Betti ale suprafeței X. Dacă corpul de bază k este corpul numerelor complexe $\mathbb{C}$, atunci $b_i = \dim_{\mathbb{C}} H^i(X, \mathbb{C})$, $H^i(X, \mathbb{C})$ fiind grupul de coomologie singulară de dimensiune i al lui X cu coeficienți complecși. Dacă k este un

corp arbitrar, numerele Betti se pot defini cu ajutorul coomologiei l-adice (unde l este un număr prim diferit de caracteristica corpului de bază). Aceste numere nu depind de alegerea lui l, iar dacă $k = \mathbb{C}$, ele coincid cu numerele Betti clasice. Ca şi în cazul topologiei algebrice clasice, în cazul general (k corp arbitrar) funcţionează teorema de dualitate Poincaré, care afirmă că $b_i = b_{4-i}$, $i = 0, 1, 2$. Deci relaţia (**) devine, ţinînd cont că $b_0 = b_4 = 1$:

$$c_2 = 2 - 2b_1 + b_2.$$

Dacă notăm prin $q = \dim H^1(X, O_X)$, şi $p_g = \dim H^2(X, O_X) = \dim H^0(X, \omega_X)$ iregularitatea şi respectiv genul geometric ale lui X, atunci formula (*) devine, ţinînd cont de ultima relaţie:

$$12 - 12q + 12p_g = (K^2) + 2 - 2b_1 + b_2,$$

sau încă:

$$(***) \qquad \begin{cases} 10 - 8q + 12p_g = (K^2) + b_2 + 2\Delta, \text{ unde} \\ \Delta = 2q - b_1. \end{cases}$$

Sub forma (***), formula lui Noether va fi utilizată în mod constant la clasificarea suprafeţelor.

Pentru detalii privind formula lui Noether se poate consulta Borel-Serre [1] (împreună cu Grotendieck [2]), iar pentru detalii referitoare la numerele Betti, Igusa [1] şi SGA $4^1/_2$ (P. Deligne şi al).

Notăm acum prin Pic (X) grupul lui Picard al suprafeţei X, iar prin $\mathrm{Pic}^0(X)$ (resp. $\mathrm{Pic}^\tau(X)$) subgrupul lui Pic (X) al tuturor claselor de izomorfisme de O_X-module inversibile algebric (resp. numeric) echivalente cu zero. Amintim că două O_X-module inversibile L_1 şi L_2 sînt algebric echivalente (şi vom scrie $L_1 \approx L_2$) dacă există o schemă conexă T, două puncte închise t_1 şi $t_2 \in T$ şi un $O_{X\times T}$-modul inversibil L astfel încît $L/X \times \{t_1\} \cong L_1$ şi $L/X \times \{t_2\} \cong L_2$, iar un O_X-modul inversibil L' este algebric echivalent cu zero dacă $L' \approx O_X$. De asemenea, L_1 şi L_2 sînt numeric echivalente (şi scriem $L_1 \approxeq L_2$) dacă pentru orice curbă integră C de pe X avem $(L_1 \cdot C) = (L_2 \cdot C)$, iar L' este numeric echivalent cu zero dacă $L' \approxeq O_X$.

Dată fiind suprafaţa X (sau orice altă varietate proiectivă şi nesingulară), considerăm atunci functorul lui Picard

$$\mathcal{P}ic_X : \mathrm{Sch}_k \to \mathrm{Ens},$$

definit pe categoria Sch_k a tuturor k-schemelor algebrice (adică de tip finit peste k), cu valori în categoria Ens a mulţimilor în felul următor: dacă $T \in \mathrm{Sch}_k$ este o k-schemă algebrică, atunci $\mathcal{P}ic_X(T)$

este mulţimea tuturor claselor de T-izomorfisme de $O_{X\times T}$-module inversibile, două $O_{X\times T}$-module inversibile L şi L' fiind T-izomorfe dacă există un O_T-modul inversibil M astfel încît $L \cong L' \otimes p_2^*(M)$, unde p_2 este proiecţia canonică a lui $X \times T$ pe T. Dacă $f: T' \to \to T$ este un morfism de k-scheme, atunci $\mathcal{P}ic_X(f): \mathcal{P}ic_X(T) \to \mathcal{P}ic_X(T')$ se defineşte prin: $\mathcal{P}ic_X(f)$ (clasa lui L) = clasa lui $(1_X \times f)^*(L)$ (deci $\mathcal{P}ic_X$ este un functor contravariant). Se observă imediat că $\mathcal{P}ic_X$ admite un subfunctor $\mathcal{P}ic_X^0$ definit prin

$$\mathcal{P}ic_X^0(T) = \{L \in \mathcal{P}ic_X(T) \mid L_t = L/X \times \{t\} \approx O_X \text{ pentru orice } t \in T\}.$$

(Scrierea este uşor abuzivă). Atunci functorii $\mathcal{P}ic_X$ şi $\mathcal{P}ic_X^0$ sînt reprezentabili şi perechile lor de reprezentare $(\underline{\mathrm{Pic}}(X), L)$ şi respectiv $(\underline{\mathrm{Pic}}^0(X), L')$ au următoarele proprietăţi:

$\underline{\mathrm{Pic}}(X)$ este reuniunea disjunctă (topologică) a unei familii infinite de scheme proprii peste $k \cdot L$ este un fascicul inversibil pe $X \times \underline{\mathrm{Pic}}(X)$, iar punctele raţionale ale lui $\underline{\mathrm{Pic}}(X)$ peste k sînt într-o bijecţie naturală cu elementele grupului lui Picard $\mathrm{Pic}(X)$ al lui X. $\underline{\mathrm{Pic}}^0(X)$ este componenta conexă a lui 0 (0 fiind punctul lui $\underline{\mathrm{Pic}}(X)$ corespunzător clasei fasciculului O_X prin bijecţia de mai sus), şi este o schemă proprie peste k. Fasciculul L' este restricţia la $X \times \underline{\mathrm{Pic}}^0(X)$ a lui L şi este unic determinat abstracţie făcînd de un $\underline{\mathrm{Pic}}^0(X)$-izomorfism. Dacă $M = L'/\{x_0\} \times \underline{\mathrm{Pic}}^0(X)$, cu x_0 un punct închis fixat pe X, atunci înlocuind pe L' cu $L' \otimes p_2^*(M)^{-1}$, obţinem o clasă de izomorfism canonică ce reprezintă clasa de $\underline{\mathrm{Pic}}^0(X)$-izomorfism a lui L', iar un reprezentant L' din această clasă poartă numele de fasciculul inversibil al lui Poincaré pe $X \times \underline{\mathrm{Pic}}^0(X)$ (sau fibratul în drepte al lui Poincaré pe $X \times \underline{\mathrm{Pic}}^0(X)$). Vedem deci că fibratul Poincaré L' este unic determinat abstracţie făcînd de un izomorfism şi este perfect caracterizat de proprietăţile (care exprimă între altele faptul că perechea $(\underline{\mathrm{Pic}}^0(X), L')$ reprezintă functorul $\mathcal{P}ic_X^0$):

i) $L'/\{x_0\} \times \underline{\mathrm{Pic}}^0(X) \cong O_{\underline{\mathrm{Pic}}^0(X)}$ şi pentru orice punct închis $a \in \underline{\mathrm{Pic}}^0(X)$ (sau raţional peste k) O_X-modulul inversibil $L'_a = L'/X \times \times \{a\}$ este algebric echivalent cu zero. Mai exact spus, asocierea $a \mapsto$ clasa (L'_a) defineşte bijecţia între mulţimea punctelor închise ale lui $\underline{\mathrm{Pic}}^0(X)$ şi mulţimea $\mathrm{Pic}^0(X)$ a claselor de izomorfism de O_X-module inversibile algebric echivalente cu zero, bijecţie menţionată deja mai sus.

ii) Dacă T este k-schemă algebrică arbitrară şi L'' este un $O_{X\times T}$-modul inversibil cu proprietăţile $L''/\{x_0\} \times T \cong O_T$ şi pentru

orice $t \in T$ O_X-modulul inversibil $L''_t = L''/X \times \{t\}$ este algebric echivalent cu zero, atunci există un unic morfism de k-scheme $f: T \to \mathrm{Pic}^0(X)$ astfel încît L'' este izomorf cu $(1_X \times f^*)(L')$.

O altă proprietate remarcabilă a schemei $\mathrm{Pic}^0(X)$ este aceea că spaţiul tangent Zariski $T_{\mathrm{Pic}^0(X),0}$ al lui $\mathrm{Pic}^0(X)$ în origine este canonic izomorf cu k-spaţiul vectorial $H^1(X, O_X)$.

Deoarece functorul $\mathcal{P}ic^0_X$ ia de fapt valori chiar în categoria grupurilor abeliene (structura de grup abelian pe $\mathcal{P}ic^0_X(T)$ fiind indusă de produsul tensorial de $O_{X\times T}$-module inversibile), atunci schema $\mathrm{Pic}^0(X)$ este de fapt o schemă în grupuri comutative. Dacă $\mathrm{Pic}^0(X)$ este schemă redusă, atunci $\mathrm{Pic}^0(X)$ are deci o structură de varietate abeliană. O teoremă a lui Cartier (vezi Mumford [1], lecţia 25) afirmă că în cazul cînd caracteristica lui k este zero, atunci orice schemă în grupuri comutative este redusă.

În cele ce urmează vom numi schema lui Picard a varietăţii X schema în grupuri $\mathrm{Pic}^0(X)$, iar varietatea lui Picard clasică a lui X, grupul algebric comutativ $\mathrm{Pic}^0(X)_{\mathrm{red}}$ (în care operaţia este indusă de operaţia de schemă în grupuri $\mathrm{Pic}^0(X)$). După cum am mai menţionat deja, dacă X este o varietate proiectivă şi nesingulară, schema $\mathrm{Pic}^0(X)$ este proprie peste k, deci varietatea lui Picard a lui X este varietate abeliană în acest caz. Functorul $\mathcal{P}ic^0_X$ este însă reprezentabil şi în cazul cînd X nu este regulată (dar X proiectivă), însă $\mathrm{Pic}^0(X)$ poate să nu fie schemă proprie peste k. Acesta este cazul curbelor algebrice cu singularităţi.

Referinţe pentru faptele enumerate mai sus fără demonstraţii sînt următoarele: Grothendieck [3] (pentru teoria generală a schemei Picard), Mumford [1] (pentru schema Picard a unei suprafeţe). Mumford [2] (pentru schema Picard a unei varietăţi abeliene), Serre [3] şi Oort [1] (pentru schema Picard a unei curbe cu singularităţi).

(5.1) Teoremă. *Dacă X este o suprafaţă, atunci are loc formula lui Noether*

$$10 - 8q + 12p_g = (K^2) + b_2 + 2\Delta,$$

unde $\Delta = 2q - b_1 = 2(q - s)$, cu $q = \dim H^1(X, O_X)$, s—dimensiunea varietăţii lui Picard clasice a lui X. În plus, $\Delta = 0$ dacă caracteristica lui k este zero, iar în cazul cînd caracteristica lui k este pozitivă avem inegalităţile $0 \leqslant \Delta \leqslant 2p_g$.

Demonstraţie. Din definiţia lui b_1 avem:

$$(\mathbb{Z}/l\mathbb{Z})^{b_1} = H^1_{\text{ét}}(X, \mathbb{Z}/l\mathbb{Z}) = \{a \in \mathrm{Pic}(X) \mid l \cdot a = 0\} =$$
$$= \{a \in \mathrm{Pic}^0(X) \mid l \cdot a = 0\} = (\mathbb{Z}/l\mathbb{Z})^{2s},$$

deoarece $\mathrm{Pic}^0(X)$ este grupul abelian subiacent varietății lui Picard a lui X, care este varietate abeliană de dimensiune s, și se aplică următoarea proprietate elementară de varietăți abeliene: mulțimea punctelor de ordin l (cu l prim cu $p = \mathrm{car}(k)$) ale varietății abeliene A de dimensiune s este într-o bijecție naturală cu $(\mathbb{Z}/l\,\mathbb{Z})^{2s}$ (vezi Mumford [2], § 6, prop. 2). Deducem deci că $b_1 = 2s$ (aceasta este tocmai definiția lui b_1 dată de Igusa în [1]). Deci

$$\Delta = 2q - b_1 = 2(q - s) \geqslant 0,$$

deoarece q este dimensiunea spațiului tangent în origine la schema $\mathrm{Pic}^0(X)$ de dimensiune s. Relația de mai sus se mai poate scrie:

$$\Delta = 2(\dim T_{\underline{\mathrm{Pic}}^0(X),0} - \dim T_{\underline{\mathrm{Pic}}^0(X)_{\mathrm{red}},0}).$$

Însă legătura dintre aceste două spații tangente este făcută prin intermediul operațiilor Bockstein (vezi Mumford [1], lecția 27) și avem:

$$q - s = \dim T_{\underline{\mathrm{Pic}}^0(X),0} - \dim T_{\underline{\mathrm{Pic}}^0(X)_{\mathrm{red}},0} =$$

$$= \dim H^1(X, O_X) - \dim \left(\bigcap_{i=1}^{\infty} \mathrm{Ker}(\beta_i)\right) \leqslant$$

$$\leqslant \dim \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} \mathrm{Im}(\beta_i)\right) \leqslant \dim H^2(X, O_X) = p_g,$$

cu β_i operatorii Bockstein pe X, de unde obținem inegalitățile dorite în legătură cu Δ. Faptul că în caracteristică zero $\Delta = 0$ rezultă din teorema lui Cartier, iar formula lui Noether din (***). Q.E.D.

(5.2) Definiție. Fie X o varietate proiectivă și nesingulară și $x_0 \in X$ un punct închis fixat. O pereche (A, α) formată dintr-o varietate abeliană A și un morfism $\alpha : X \to A$ astfel încît $\alpha(x_0) = 0$ (elementul nul al lui A), poartă numele de *varietate Albanese* a varietății X dacă pentru orice morfism $f : X \to B$ astfel încît B este varietate abeliană și $f(x_0) = 0$, există un unic omomorfism $g : A \to B$ de varietăți abeliene astfel încît $g \circ \alpha = f$.

În legătură cu această definiție este de remarcat rezultatul elementar care afirmă că orice morfism $g' : A \to B$ între două varietăți abeliene A și B este de forma $g' = g + b$, unde $g : A \to B$ este un omomorfism de varietăți abeliene și $b = g'(0) \in B$. Rezultă atunci imediat că definiția (5.2) putea fi dată și fără a se utiliza punctul x_0 în felul următor: perechea (A, α) formată din varietatea abeliană A și morfismul $\alpha : X \to A$ se numește varietate Albanese a lui X dacă pentru orice alt morfism $f : X \to B$ într-o varietate abeliană B există un unic morfism $g : A \to B$ astfel încît $g \circ \alpha = f$. De aici rezultă că orice două varietăți Albanese ale lui X sînt canonic

izomorfe, şi, în particular, că varietatea Albanese a lui X nu depinde (modulo un izomorfism) de alegerea punctului bază x_0. Într-un mod uşor abuziv vom nota prin $(\mathrm{Alb}\,(X), \alpha)$ varietatea Albanese a varietăţii (proiective şi nesingulare) X.

Existenţa varietăţii Albanese a unei varietăţi proiective şi nesingulare X este demonstrată în Serre [4] folosindu-se metode destul de elementare. În continuare vom indica un argument rapid care probează nu numai existenţa varietăţii Albanese $\mathrm{Alb}\,(X)$ ci şi raportul în care se află ea faţă de varietatea lui Picard (clasică) a lui X. Vom folosi însă teoria schemei Picard.

Fie B o varietate abeliană. Din Mumford [2] rezultă că schema sa Picard $\hat{B} = \underline{\mathrm{Pic}}^0\,(B)$ este totdeauna redusă, deci varietate abeliană. De aici rezultă că $\dim\,(\hat{B}) = \dim\,(T_{\hat{B},0}) = \dim\,H^1\,(B, O_B) = \dim\,(B)$. În acest caz $\hat{B}$ poartă numele de varietatea abeliană duală varietăţii abeliene B (*loc. cit.*).

Dacă X este o varietate proiectivă şi nesingulară arbitrară, atunci notînd prin $P\,(X) = \mathrm{Pic}^0\,(X)_{\mathrm{red}}$ varietatea lui Picard a lui X, există un morfism canonic

$$u_X : X \to (P\,(X))^\wedge = \underline{\mathrm{Pic}}^0\,(P\,(X))$$

definit în felul următor. Fixăm un punct bază $x_0 \in X$, L' fibratul Poincaré pe $X \times \mathrm{Pic}^0(X)$, L'' fibratul Poincaré pe $P\,(X) \times P\,(X)^\wedge$, L'_{red} restricţia lui L' la subschema $X \times P\,(X)$ a lui $X \times \underline{\mathrm{Pic}}^0\,(X)$ şi $v : P\,(X) \times X \to X \times P\,(X)$ morfismul $(a, b) \mapsto (b, a)$. Folosind proprietatea de universalitate a varietăţii abeliene duale $(P\,(X))^\wedge$, vedem că există un (unic) morfism canonic $u_X : X \to (P\,(X))^\wedge$ astfel încît

$$v^*\,(L'_{\mathrm{red}}) = (1_{P(X)} \times u_X)^*\,(L'').$$

Un fapt remarcabil este acela că dacă X este varietate abeliană, atunci morfismul canonic $u_X : X \to (X^\wedge)^\wedge = X^{\wedge\,\wedge}$ este un izomorfism (ceea ce justifică denumirea de varietate abeliană duală, în sensul că biduala unei varietăţi abeliene trebuie să fie (canonic) izomorfă cu varietatea de plecare, vezi Mumford [2]).

Dacă X este varietate proiectivă şi nesingulară şi x_0 un punct bază în X, atunci punem $\mathrm{Alb}\,(X) = (P\,(X))^\wedge$ şi $\alpha = u_X$ morfismul descris mai sus. Din construcţie avem că $\alpha\,(x_0) = 0$. Se verifică acum fără nici un fel de dificultate (combinînd proprietăţi de universalitate) că dacă $f : X \to B$ este un morfism cu valori în varietatea abeliană B astfel încît $f\,(x_0) = 0$, atunci omomorfismul $g = (P\,(f))^\wedge : \mathrm{Alb}\,(X) \to \mathrm{Alb}\,(B) = B^{\wedge\,\wedge}$ are proprietatea că $g \circ u_X = u_B \circ f$ şi este unic cu această proprietate, unde $P\,(f) : P\,(B) \to$

$\to P(X)$ este morfismul indus de f la varietățile Picard. Cum am remarcat deja că u_B este izomorfism, rezultă într-adevăr că $(P(X)^{\wedge}, u_X)$ este varietatea Albanese pentru varietatea X.

În acest mod am demonstrat:

(5.3) TEOREMĂ. *Dacă X este o varietate proiectivă și nesingulară, atunci varietatea Albanese* (Alb (X), α) *există și este unică abstracție făcînd de un izomorfism, iar* Alb (X) *coincide cu duala varietății lui Picard $P(X)$ a lui X. În particular, dacă X este suprafață, dimensiunea varietății* Alb (X) *este (în notațiile teoremei* (5.1)) *egală cu* $s = \dim (P(X))$ *și deci* $\dim (\text{Alb}(X)) \leqslant q$. *În plus avem egalitate dacă și numai dacă* $\Delta = 0$ *(de exemplu dacă* $\text{car}(k) = 0$ *sau dacă* $p_g = 0$).

Este de remarcat că dacă X este o curbă proiectivă și nesingulară, atunci schema Picard $\text{Pic}^0(X)$ este totdeauna redusă și deci coincide cu varietatea lui Picard a lui X. Mai mult, în acest caz varietatea abeliană $P(X)$ este izomorfă cu duala sa, de unde deducem că Alb (X) (care în acest caz mai poartă și numele de jacobiana curbei X) este izomorfă cu $P(X)$.

În continuare vom mai folosi următoarele notații. Prin $NS(X)$ vom nota grupul factor $\text{Pic}(X)/\text{Pic}^0(X)$, care poartă numele de grupul Néron-Severi al varietății proiective și nesingulare X. O teoremă demonstrată de Severi în caracteristică zero și ulterior de Néron în caracteristică arbitrară afirmă că acest grup este finit generat, iar rangul său ρ mai poartă numele de numărul bază al lui X. O inegalitate a lui Igusa afirmă că $\rho \leqslant b_2$ (cf. Grothendieck și al. [1]; peste corpul complex acest rezultat este elementar, deoarece se demonstrează fără multe dificultăți, că $\rho \leqslant \dim H^1(X, \Omega^1_{X/k})$ dacă $\text{car}(k) = 0$, a se vedea Hartshorne [1], pag. 368, exercițiul 1.8, pentru cazul cînd X este o suprafață).

(5.4) Fie acum X o varietate proiectivă și nesingulară și L un O_X-modul inversibil. Lui L i se poate asocia k-algebra graduată $\Gamma_*(L) = \bigoplus_{n=0}^{\infty} H^0(X, L^n)$, în care partea omogenă de grad n este $H^0(X, L^n)$, și în care înmulțirea dintre $s \in H^0(X, L^m)$ și $s' \in H^0(X, L^n)$ $(m, n \geqslant 0)$ este dată de $s \cdot s' = s \otimes s' \in H^0(X, L^{m+n})$. Este clar că dacă $s \otimes s' = 0$, atunci $s = 0$ sau $s' = 0$, și deci $\Gamma_*(L)$ este un domeniu de integritate. În plus, $\Gamma_*(L)$ conține pe $k = H^0(X, L^0) = H^0(X, O_X)$. Are deci sens să vorbim despre gradul de transcendență $\lambda(L)$ al lui $\Gamma_*(L)$ peste k.

(5.5) LEMĂ. *Au loc inegalitățile* $0 \leqslant \lambda(L) \leqslant \dim(X) + 1$. *Dacă în plus L este amplu* $\lambda(L) = \dim(X) + 1$ *și pentru n suficient de mare* $\Gamma_*(L^n)$ *este o k-algebră de tip finit.*

Demonstrație. Fie H un divizor efectiv foarte amplu pe X astfel încît $L' = L \otimes O_X(H)$ să fie amplu (cf. EGA II). Corespunzător lui H obținem un omomorfism injectiv $L \hookrightarrow L'$ care induce un omomorfism injectiv $\Gamma_*(L) \to \Gamma_*(L')$ de k-algebre, de unde $\lambda(L) \leqslant \leqslant \lambda(L')$. În acest mod vedem că este suficient să demonstrăm afirmația a doua. Fie deci L amplu. Observăm că pentru orice $n > 0$, extinderea de inele $\Gamma_*(L^n) \subset \Gamma_*(L)$ are proprietatea că orice element omogen din $\Gamma_*(L)$ ridicat la puterea n aparține lui $\Gamma_*(L^n)$, de unde deducem egalitatea $\lambda(L) = \lambda(L^n)$. Cu această observație, putem presupune L foarte amplu, și fie atunci $X \hookrightarrow P^m$ o scufundare a lui X într-un spațiu proiectiv astfel încît $L \cong O_X(1)$. Atunci omomorfismul Serre

$$\alpha : S(X) \to \Gamma_*(L)$$

este un TN-izomorfism, unde $S(X)$ este inelul de coordonate omogene al lui X în P^m (vezi EGA III 2.3.1). Prin urmare pentru n suficient de mare compunerea dintre imersia $X \hookrightarrow P^m$ și imersia Veronese $P^m \hookrightarrow P^{N(n)}$, cu $N(n) = \binom{m+n}{n} - 1$, are proprietatea că omomorfismul Serre asociat este chiar un izomorfism. Atunci a doua afirmație a lemei (5.5) este clară deoarece inelul de coordonate omogene al lui X în $P^{N(n)}$ este o k-algebră finit generată de grad de transcendență egal cu $\dim(X) + 1$. Q.E.D.

(5.6) DEFINIȚIE. Dacă X este o varietate proiectivă și nesingulară de dimensiune $d \geqslant 1$, atunci $\Gamma_*(\omega_X)$, unde $\omega_X = \Omega^d_{X/k}$, poartă numele de *inelul canonic* al lui X și în continuare va fi notat cu $R(X)$. Numărul $c(X) = \lambda(\omega_X) - 1$ poartă numele de *dimensiunea canonică* a lui X, iar $p_n = p_n(X) = \dim H^0(\omega_X^n)$ $(n \geqslant 1)$ poartă numele de *n-genul* (sau plurigenul de ordin n) al lui X.

Din (5.5) rezultă că $-1 \leqslant c(X) \leqslant \dim(X)$, iar $c(X) = -1$ dacă și numai dacă $p_n = 0$ pentru orice $n \geqslant 1$. Dacă X este suprafață, p_1 coincide cu genul geometric p_g al lui X.

(5.7) PROPOZIȚIE. *Dacă X și Y sînt două suprafețe și $u : X \to \to Y$ este o aplicație birațională, atunci u induce un izomorfism $u^* : R(Y) \to R(X)$ de k-algebre graduate. În particular, pentru orice $n \geqslant 1$, n-genul p_n este un invariant numeric birațional.*

Demonstrație. Ținînd cont de structura aplicațiilor biraționale între două suprafețe (ca o compunere de transformări pătratice sau de inverse de acestea), ne reducem imediat la cazul cînd u este transformarea pătratică a lui Y de centru y. Atunci, notînd prin $E = = u^{-1}(y)$, avem formula :

$$\omega_X \cong u^*(\omega_Y) \otimes O_X(E),$$

de unde, pentru orice $n \geqslant 1$,

$$\omega_X^n = u^*(\omega_Y^n) \otimes O_X(nE).$$

Folosind formula proiecţiei avem $u_*(\omega_X^n) \cong \omega_Y^n \otimes u_* O_X(nE) \cong \omega_Y^n$, deoarece $u_* O_X(nE) \cong O_X$ (imediat de probat prin inducţie după n, vezi (4.13)). Deci $H^0(Y, u_*\omega_X^n) \cong H^0(Y, \omega_Y^n)$, sau încă, $H^0(X, \omega_X^n) \cong H^0(Y, \omega_Y^n)$. Q.E.D.

(5.8) *Exemple.* 1) Fie X o curbă proiectivă şi nesingulară de gen g. Atunci:

a) $g = 0$ implică $X = P^1$, $\omega_X = O(-2)$, $R(X) = k$, $c(X) = -1$, $p_n = 0$ pentru orice $n \geqslant 1$.

b) $g = 1$ implică $\omega_X \cong O_X$, $c(X) = 0$, $p_n = 1$ pentru orice $n \geqslant 1$.

c) $g \geqslant 2$ implică $\deg(\omega_X) = 2g - 2 > 0$, deci ω_X amplu şi $c(X) = 1$.

ii) Fie $X = C_1 \times C_2$ produsul a două curbe proiective şi nesingulare de genuri g_1 şi g_2 respectiv. Atunci $\omega_X \cong p_1^*(\omega_{C_1}) \otimes p_2^*(\omega_{C_2})$, unde p_1 şi p_2 sînt proiecţiile lui X pe C_1 şi C_2 respectiv. Deci: $H^0(\omega_X^n) = H^0(\omega_{C_1}^n) \otimes H^0(\omega_{C_2}^n)$, $n > 0$, şi avem:

a) $g_1 = 0$ sau $g_2 = 0$ implică $c(X) = -1$.

b) $g_1 = g_2 = 1$ implică $c(X) = 0$.

c) $g_1 \geqslant 2$ şi $g_2 = 1$, sau $g_1 = 1$ şi $g_2 \geqslant 2$ implică $c(X) = 1$.

d) $g_1 \geqslant 2$ şi $g_2 \geqslant 2$ implică $c(X) = 2$.

Justificarea acestor afirmaţii este simplă şi decurge din următoarea lemă elementară:

(5.9) LEMĂ. *Fie B o curbă proiectivă şi nesingulară şi M un O_B-modul inversibil. Atunci:*

i) $\dim H^0(B, M^n) = n \deg(M) + const.$, *dacă* $\deg(M) \geqslant 1$ *şi* $n \gg 0$.

ii) $\dim H^0(B, M^n) = 1$ *dacă* $M^n \cong O_B$.

iii) $\dim H^0(B, M^n) = 0$ *dacă* $\deg(M) < 0$ *sau dacă* $\deg(M) = 0$, $n \geqslant 1$ *şi* $M^n \not\cong O_B$.

(5.10) *Observaţii.* Fie X o suprafaţă.

a) Dacă există un $n \geqslant 1$ astfel încît $p_n \geqslant 2$, atunci $c(X) \geqslant 1$.

b) Dacă $p_n \leqslant 1$ pentru orice $n \geqslant 1$, atunci $c(X) \leqslant 0$. În plus, $c(X) = 0$ dacă şi numai dacă $p_n \leqslant 1$ pentru orice $n \geqslant 1$ şi $p_n = 1$ pentru un $n \geqslant 1$.

Demonstrație. Dacă demonstrăm a), atunci b) este evidentă. Fie deci α și $\beta \in H^0(X, \omega_X^n)$ două secțiuni linear independente peste k. Atunci pentru orice $m \geqslant 1$, α^m, $\alpha^{m-1} \cdot \beta, \ldots, \beta^m \in H^0(X, \omega_X^{mn})$ sînt de asemenea linear independente peste k, deoarece dacă

$$(*) \qquad \lambda_0 \alpha^m + \lambda_1 \alpha^{m-1} \beta + \ldots + \lambda_m \beta^m = 0, \quad \lambda_i \in k,$$

atunci polinomul $P(U, V) = \lambda_0 U^m + \lambda_1 U^{m-1} V + \ldots + \lambda_m V^m$ este de forma $P(U, V) = (\lambda U + \mu V)^m$ cu $\lambda, \mu \in k$ (deoarece k este algebric închis). Din (*) deducem deci $(\lambda\alpha + \mu\beta)^m = 0$, și deoarece $R(X)$ este domeniu de integritate, $\lambda\alpha + \mu\beta = 0$, adică $\lambda = \mu = 0$.

Rezultă că subalgebra lui $R(X)$ (peste k) generată de α și β este izomorfă cu algebra de polinoame $k[U, V]$, și deci deg tr. $R(X) \geqslant$ $\geqslant$ deg tr. $k[U, V] = 2$, adică $c(X) \geqslant 1$. Q.E.D.

(5.11) *Referințe bibliografice.* Formula lui Noether se poate găsi în Borel-Serre [1]. Numerele Betti ale unei suprafețe algebrice abstracte au fost pentru prima dată definite de Igusa (cf. Igusa [1]); ulterior s-a constatat că ele pot fi introduse și cu ajutorul coomologiei etale (cf. Deligne și al. [1]). Detalii privind teoria schemei Picard se pot găsi în Grothendieck [3], Mumford [1] și [2], Serre [3] și Oort [1]. Construcția și proprietățile elementare ale varietății Albanese a unei varietăți algebrice se găsesc în Serre [4]. Inegalitatea Igusa-Severi este demonstrată în Igusa [1] sau Grothendieck și al. [1]. Inelul canonic al unei suprafețe a fost considerat pentru prima dată de Mumford [3].

§ 6.

EXISTENȚA MODELELOR MINIMALE

(6.1) DEFINIȚIE. Fie X o suprafață. Vom spune că X este *model minimal* dacă orice morfism birațional $f: X \to Y$, cu Y suprafață (tot proiectivă și nesingulară ca și X), este un izomorfism.

Din teorema de structură a morfismelor biraționale de suprafețe și din criteriul de contractibilitate al lui Castelnuovo (3.30) rezultă că X este suprafață minimală dacă și numai dacă X nu conține nici-o curbă excepțională de prima specie.

Scopul acestui paragraf este de a demonstra:

(6.2) TEOREMĂ. *Fie* $\sigma: X' \to X$ *transformarea pătratică a suprafeței* X *de centru punctul* x. *Atunci* $\dim H^1(X, \Omega^1_{X/k}) < \dim H^1(X', \Omega^1_{X'/k})$.

(6.3) COROLAR. *Orice suprafață X domină o suprafață minimală. În particular, orice clasă de izomorfism birațional de suprafețe conține cel puțin o suprafață minimală.*

Demonstrația corolarului (6.3). Dacă X este suprafață minimală am terminat, iar dacă nu, X conține o curbă excepțională de prima specie E. Din (3.30) există o contracție $f_1: X \to X_1$, cu X_1 suprafață și f_1 transformarea pătratică a lui X_1 de centru un punct $x_1 \in X_1$. Dacă X_1 este suprafață minimală, am terminat, iar dacă nu, există o contracție $f_2: X_1 \to X_2$ a unei curbe excepționale de prima specie E_1 de pe X_1, ş.a.m.d. Obținem deci un şir de transformări pătratice

$$X \to X_1 \to X_2 \to \dots$$

Trebuie arătat că acest şir este finit. În caz contrar, aplicînd teorema (6.2) obținem:

$$\dim H^1(X, \Omega^1_{X/k}) > \dim H^1(X_1, \Omega^1_{X_1/k}) > \dim H^1(X_2, \Omega^1_{X_2/k}) > \dots$$

lucru imposibil deoarece k-spațiul vectorial $H^1(X, \Omega^1_{X/k})$ este finit dimensional. Q.E.D.

Demonstrația teoremei (6.2). *Pasul* 1. Fie $U = \text{Spec}(A) \subset X$ o vecinătate afină a punctului x astfel încît, notînd cu m idealul maximal al lui A corespunzător punctului x, m să fie generat de două elemente $u, v \in m$ (altfel spus, u și v reprezintă un sistem regulat de parametri în jurul punctului x). Atunci $\sigma^{-1}(U)$ admite o acoperire formată din deschișii afini $U_1 = \text{Spec}(A[v/u])$ și $U_2 = \text{Spec}(A[u/v])$. Fie $w_1 = v/u$ și $w_2 = u/v$. Atunci $U_1 \cap U_2 = \text{Spec}(B)$ cu $B = A[w_1, w_2]$ ($w_1 w_2 = 1$). Afirmăm că *omomorfismul surjectiv de* A*-algebre* $\varphi : A[T] \to A[w_1]$ *care duce pe* T *în* w_1 (T *fiind o variabilă peste* A) *induce izomorfismul* $A[T]/(uT - v) \cong A[w_1]$ (*și asemănător pentru* $A[w_2]$).

Într-adevăr, incluziunea $(uT - v) \subset \text{Ker}(\varphi)$ fiind evidentă, fie $f = a_0 + a_1T + \ldots + a_nT^n \in A[T]$, cu $a_n \neq 0$, $n \geqslant 0$ și $f(w_1) = 0$. Dacă $n = \deg(f) = 0$, atunci $f = 0$, și deci putem presupune $n \geqslant 1$. Egalitatea $f(w_1) = 0$ arată că $a_nv^n = -u(a_0u^{n-1} + a_1u^{n-2}v + \ldots + a_{n-1}v^{n-1})$ și deci în inelul local regulat $A_m = O_{Xx}$ u divide pe a_nv^n. Cum A_m este factorial și u nu divide pe v, rezultă că u divide pe a_n (de fapt u este un element prim în A_m), deci $a_n/u \in A_m$. Fie acum $m' \neq m$ un alt ideal maximal al lui A. Atunci cel puțin unul din elementele u, v este inversibil în $A_{m'}$. Dacă u este inversibil în $A_{m'}$, atunci $a_n/u \in A_{m'}$, iar dacă v este inversibil în $A_{m'}$, atunci egalitatea $a_n/u = -(v^n)^{-1}(a_0u^{n-1} + a_1u^{n-2}v + \ldots + a_{n-1}v^{n-1})$ arată că din nou $a_n/u \in A_{m'}$ (pentru orice ideal maximal $m' \neq m$). Deducem că $a_n/u \in A$, deci există un $a' \in A$ astfel încît $a_n = ua'$. Atunci există un $g \in A[T]$ astfel încît $f = a'T^{n-1}(uT - v) + g$, cu $\deg(g) < \deg(f) = n$ și $g(w_1) = 0$. Prin ipoteza de inducție g este multiplu de $(uT - v)$, de unde rezultă că și f este multiplu de $uT - v$.

Pasul 2. *Omomorfismul canonic* $\Omega^1_X \to \sigma_*\Omega^1_{X'}$, (*unde am notat mai simplu* $\Omega^1_X = \Omega^1_{X/k}$) *este surjectiv, avînd nucleul de suport conținut în* $\{x\}$. (De fapt acest omomorfism este chiar un izomorfism, însă nu avem nevoie de această informație în plus.)

Demonstrația pasului 2. Din faptul că σ este izomorfism în afara lui $E = \sigma^{-1}(x)$ rezultă imediat că suportul nucleului omomorfismului de la pasul 2 este conținut în $\{x\}$. Rămîne deci de probat surjectivitatea acestui omomorfism. Problema fiind locală în jurul lui x, putem presupune $X = U = \text{Spec}(A)$ ca la pasul 1. Atunci $X' = U_1 \cup U_2$. A ne da o formă diferențială $\omega \in \Gamma(X, \sigma_*(\Omega^1_{X'})) = \Gamma(X', \Omega^1_{X'})$ revine la a ne da două forme diferențiale $\omega_1 \in \Gamma(U_1, \Omega^1_{X'})$ și $\omega_2 \in \Gamma(U_2, \Omega^1_{X'})$ cu proprietatea $\omega_1/U_1 \cap U_2 = \omega_2/U_1 \cap U_2$. Însă

deoarece $U_1 = \mathrm{Spec}\,(A_1)$, $U_2 = \mathrm{Spec}\,(A_2)$, $U_1 \cap U_2 = \mathrm{Spec}\,(B)$, cu $A_1 = A[w_1]$, $A_2 = A\,[w_2]$ şi $B = A[w_1, w_2]$, putem scrie:

$$(*)\qquad \begin{cases} \omega_1 = \sum\limits_i b'_i \mathrm{d}a'_i + f_1(w_1)\,\mathrm{d}w_1 \\ \omega_2 = \sum\limits_j b''_j \mathrm{d}a''_j + f_2(w_2)\,\mathrm{d}w_2 \end{cases}$$

cu $a'_i, a''_j \in A$, $b'_i \in A_1$, $b''_j \in A_2$, $f_1, f_2 \in A\,[T]$. În plus, ω_1 şi ω_2 au imagini egale în $\Omega_B = \Omega^1_{B/k}$.

Dacă $\bar{f}_1$ şi $\bar{f}_2$ sînt reducerile lui f_1 şi f_2 respectiv modulo idealul m, atunci $\omega_1/E \cap U_1 = \bar{f}_1(T)\cdot\mathrm{d}T$, $\omega_2/E \cap U_2 = \bar{f}_2(T')\cdot\mathrm{d}T'$, cu T şi T' coordonate neomogene pe $E = P^1$ astfel încît $T\cdot T' = 1$. Cum cele două restricţii la E coincid pe intersecţia $E \cap U_1 \cap U_2$, ele definesc o formă diferenţială $\omega' \in \Gamma\,(E, \Omega^1_E)$. Cum însă $\Omega^1_E \cong O_E(-2)$ şi $O_E(-2)$ nu are secţiuni globale, rezultă $\bar{f}_1 = \bar{f}_2 = 0$. Altfel spus, toţi coeficienţii lui f_1 şi f_2 aparţin idealului m. Însă deoarece $mA_1 = uA_1$, putem scrie $f_1(w_1)\,\mathrm{d}w_1 = g_1(w_1)\cdot u\cdot\mathrm{d}w_1 = g_1(w_1)\cdot\mathrm{d}v - g_1(w_1)\cdot w_1\cdot\mathrm{d}u$, cu $g_1 \in A_1[T]$. În definitiv am demonstrat că, fără a restrînge generalitatea, putem în (*) presupune că $f_1 = f_2 = 0$, deci:

$$(**)\qquad \begin{cases} \omega_1 = \sum\limits_i b'_i \mathrm{d}a'_i, \quad a'_i \in A,\ b'_i \in A_1 \\ \omega_2 = \sum\limits_j b''_j \mathrm{d}a''_j, \quad a''_j \in A,\ b''_j \in A_2. \end{cases}$$

Acum amintim următoarele fapte generale elementare:

a) Dacă C este o k-algebră şi T este o nedeterminată peste C, atunci are loc şirul exact:

$$0 \to \Omega_C \otimes_C C[T] \to \Omega_{C[T]} \to \Omega_{C[T]/C} \to 0$$

($\Omega_C = \Omega^1_{C/k}$), şi deoarece $\Omega_{C[T]/C} = C[T]\cdot\mathrm{d}T$, obţinem izomorfismul:

$$\Omega_{C[T]} \cong (\Omega_C \otimes_C C[T]) \oplus C[T]\cdot\mathrm{d}T$$

b) Dacă I este un ideal în C astfel încît C şi C/I să aibă toate localizatele regulate, atunci are loc şirul exact canonic:

$$0 \to I/I^2 \to \Omega_C \otimes_C C/I \to \Omega_{C/I} \to 0.$$

c) Dacă S este un sistem multiplicativ închis în C, atunci are loc un izomorfism canonic $\Omega_{S^{-1}C} = S^{-1}\Omega_C$.

Folosind pasul 1 şi aceste trei fapte generale (în situaţia $A[w_1] = A[T]/I$, cu $I = (uT - v)A[T]$ şi $B = A[w_1, w_1^{-1}]$), obţinem izomorfismul:

$$\Omega_B \cong \frac{(\Omega_A \otimes_A B) \oplus B \cdot \mathrm{d}w_1}{B \cdot (w_1 \cdot \mathrm{d}u + u.\mathrm{d}w_1 - \mathrm{d}v)},$$

unde $B \cdot \mathrm{d}w_1$ este un B-modul liber de rang 1. De aici rezultă că omomorfismul natural $\Omega_A \otimes_A B \to \Omega_B$ este injectiv. Deoarece însă $\sigma_* O_{X'} = O_X$, are loc şirul exact de A-module:

$$0 \to A \xrightarrow{\varphi} A_1 \oplus A_2 \xrightarrow{\psi} B \to 0,$$

unde $\varphi(a) = (a, a)$ şi $\psi(a_1, a_2) = a_1 - a_2$ (de fapt relaţia $\sigma_* O_{X'} = O_X$ probează incluziunea $\mathrm{Ker}(\psi) \subseteq \mathrm{Im}(\varphi)$, şi cum incluziunea contrară este evidentă, avem $\mathrm{Im}(\varphi) = \mathrm{Ker}(\psi)$; surjectivitatea lui ψ rezultă imediat din faptul că $B = A[w_1, w_2]$ cu $w_1 w_2 = 1$). Tensorizînd acest şir exact cu Ω_A, obţinem şirul exact:

$$\Omega_A \xrightarrow{\varphi \otimes 1} (A_1 \otimes_A \Omega_A) \oplus (A_2 \otimes_A \Omega_A) \xrightarrow{\psi \otimes 1} B \otimes_A \Omega_A \to 0.$$

Deoarece (**) arată că $(\omega_1, \omega_2) \in \mathrm{Ker}(\psi \otimes 1) = \mathrm{Im}(\varphi \otimes 1)$ (am folosit injectivitatea lui $\Omega_A \otimes_A B \to \Omega_B$), rezultă că există $\omega \in \Omega_A$ astfel încît $(\varphi \otimes 1)(\omega) = (\omega_1, \omega_2)$ şi demonstraţia pasului 2 este completă.

Pasul 3. Considerăm şirul spectral Leray:

$$E_2^{pq} = H^p(X, R^q \sigma_*(\Omega^1_{X'})) \Rightarrow H^{p+q}(X', \Omega^1_{X'}).$$

Scriind o parte din şirul exact în grade mici asociat acestui şir spectral avem şirul exact:

$$0 \to H^1(X, \sigma_*(\Omega^1_{X'})) \to H^1(X', \Omega^1_{X'}) \xrightarrow{\alpha} H^0(X, R^1 \sigma_*(\Omega^1_{X'})).$$

Din pasul 2 rezultă că omomorfismul canonic $H^1(X, \Omega^1_X) \to H^1(X, \sigma_*(\Omega^1_{X'}))$, indus de omomorfismul (surjectiv şi de suport cel mult finit), $\Omega^1_X \to \sigma_*(\Omega^1_{X'})$, este un izomorfism.

Demonstraţia teoremei (6.2) se încheie dacă probăm:

Pasul 4. *Omomorfismul α este netrivial.*

Mai întii observăm că deoarece $R^1\sigma_*(\Omega^1_{X'})$ este fasciculul asociat prefasciculului $U \mapsto H^1(\sigma^{-1}(U), \Omega^1_{X'})$, aplicația α este tocmai aplicația de la prefascicul la fasciculul său asociat. Deoarece orice element din $H^0(X, R^1\sigma_*(\Omega^1_{X'})) = (R^1\sigma_*\Omega^1_{X'})_x$ provine dintr-un element din $H^1(\sigma^{-1}(U), \Omega^1_{X'})$, cu U vecinătate convenabilă a lui x în X, și deoarece avem aplicația naturală de restricție

$$\text{res} : H^1(\sigma^{-1}(U), \Omega^1_{X'}) \to H^1(E, \Omega^1_E),$$

obținem omomorfismul natural

$$\beta : H^0(X, R^1\sigma_*(\Omega^1_{X'})) \to H^1(E, \Omega^1_E).$$

Ca să demonstrăm pasul 4 va fi suficient să dovedim că omomorfismul natural $\beta \circ \alpha$ este netrivial. În acest scop considerăm diagrama comutativă :

$$\begin{array}{ccc} \text{Pic}(X') & \xrightarrow{\ \gamma\ } & H^1(X', \Omega^1_{X'}) \\ {\scriptstyle \text{res}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \beta\circ\alpha} \\ \text{Pic}(E) & \xrightarrow{\ \gamma'\ } & H^1(E, \Omega^1_E) \end{array}$$

unde prima săgeată orizontală este dată de $\gamma(\xi) =$ clasa de coomologie a 1-cociclului $\{d\xi_{ij}/\xi_{ij}\}_{i,j} \in Z^1(\mathcal{U}, \Omega^1_{X'})$, unde $\mathcal{U} = \{U_i\}_i$ este o acoperire deschisă a lui X' în care ξ este reprezentat de 1-cociclul $\{\xi_{ij}\}_{i,j} \in Z^1(\mathcal{U}, O^*_X)$. Fie atunci $\xi \in \text{Pic}(X')$ clasa de coomologie asociată curbei excepționale E de pe X'. Atunci $(\beta \circ \alpha)(\gamma(\xi)) = \gamma'(\text{res}(\xi))$. Însă restricția lui ξ la E este (unica) fibrare din Pic (E) de grad -1 (ținem cont de relația $(E^2) = -1$). Dacă dovedim că $\gamma'(\text{res}(\xi)) \neq 0$ teorema va fi demonstrată. Însă, după cum rezultă imediat din definiții, $\gamma'(\text{res}(\xi))$ este clasa de coomologie din $H^1(E, \Omega^1_E)$ reprezentată de 1-cociclul $dz/z = \eta_{12} \in Z^1(\{U'_1, U'_2\}, \Omega^1_E)$, cu U'_1, U'_2 acoperirea canonică a dreptei proiective, iar z o coordonată neomogenă pe P^1. Cum $U'_1 \cong$ dreapta afină $\cong U'_2$, rezultă că dacă η_{12} ar fi o 1-cofrontieră ar rezulta că există formele diferențiale $\omega_1 \in \Gamma(U'_1, \Omega^1_E)$ și $\omega_2 \in \Gamma(U'_2, \Omega^1_E)$ date de formulele

$$\omega_1 = (\sum_i a_i z^i)\cdot dz, \qquad a_i \in k,$$

$$\omega_2 = (\sum_j b_j z'^j)\cdot dz', \qquad b_j \in k,\ z' = 1/z,$$

astfel încît $dz/z = \omega_1 - \omega_2$ pe $U_1' \cap U_2'$. Acest lucru conduce la egalitatea absurdă

$$(\sum_i a_i z^i + \sum_j b_j / z^{2+j}) \cdot dz = dz/z.$$

Teorema (6.2) este complet demonstrată.

(6.4) *Observații.* a) Importanța corolarului (6.3) în clasificarea suprafețelor (care ne va interesa în paragrafele următoare) rezidă în faptul că această clasificare fiind „birațională", vom putea totdeauna presupune că suprafața X de clasificat este model minimal (deoarece după (6.3) orice suprafață domină un model minimal). Mai mult, vom vedea că, exceptînd suprafețele riglate, orice clasă de izomorfism birațional de suprafețe proiective și nesingulare posedă *un singur* model minimal. De asemenea vom clasifica modelele minimale ale suprafețelor riglate. Clasificarea suprafețelor se face cu ajutorul unor invarianți numerici biraționali (cum sînt plurigenurile p_n și în particular genul geometric p_g, cf. (5.7)). Un alt invariant numeric birațional important din acest punct de vedere este iregularitatea. Într-adevăr, folosind teorema de structură a izomorfismelor biraționale de suprafețe ne reducem imediat la a vedea că $\dim H^1(O_X)$ se conservă la o transformare pătratică $\sigma' : X' \to X$. Or, deoarece X este nesingulară (deci $E = P^1$) și folosind (3.8), rezultă $R^i \sigma_*(O_{X'}) = 0$ pentru orice $i > 0$, sau echivalent $\chi(O_{X'}) = \chi(O_X)$ (și cum p_g este invariant birațional, rezultă q invariant birațional).

b) Corolarul (6.3) se mai putea demonstra cu ajutorul izomorfismului $\text{Pic}\,(X') \cong \text{Pic}\,(X) \oplus \mathbb{Z} O_{X'}(E)$ (exercițiu !), de unde se deduce imediat izomorfismul $\text{Num}\,(X') = (\text{Num}\,(X) \oplus \mathbb{Z}\, O_{X'}(E)$, și folosind apoi faptul că rangul lui $\text{Num}\,(X)$ este finit (teorema Néron-Severi).

(6.5) *Referințe bibliografice.* Demonstrația teoremei (6.2) este prezentată după Safarevici [2].

§ 7.

MORFISME DE LA O SUPRAFAȚĂ LA O CURBĂ. FIBRĂRI ELIPTICE ȘI CVASIELIPTICE

(7.1) TEOREMĂ. *Fie $f: X \to Y$ un morfism dominant de la varietatea algebrică nesingulară şi ireductibilă X la varietatea algebrică Y, astfel încît extinderea de corpuri de funcţii raţionale $f^*: k(Y) \hookrightarrow k(X)$ să fie separabilă şi $k(Y)$ algebric închis în $k(X)$. Atunci există un deschis nevid V în Y astfel încît pentru orice $y \in V$ fibra $f^{-1}(y)$ să fie geometric integră.*

Demonstraţie. Fie ξ punctul generic al lui X şi η punctul generic al lui Y. Este clar că fibra generică $f^{-1}(\eta)$ conţine pe ξ (f este dominant), este ireductibilă (închiderea lui $f^{-1}(\eta)$ este X) şi redusă (pentru orice $x \in f^{-1}(\eta)$, inelul local $\mathcal{O}_{f^{-1}(\eta),x}$ coincide cu $\mathcal{O}_{X,x}$). Altfel spus, schema $f^{-1}(\eta)$ este integră peste $k(Y)$. Ipotezele teoremei implică faptul că această schemă este chiar geometric integră, adică pentru orice extindere K a lui $k(Y)$, schema $f^{-1}(\eta) \otimes_{k(Y)} K$ rămîne integră. Într-adevăr, după EGA IV, 4.5.9 şi 4.6.1, este suficient să ştim că extinderea $k(X)/k(Y)$ este separabilă şi că $k(Y)$ este algebric închis în $k(X)$, fapte valabile prin ipoteză.

Demonstraţia propriu-zisă a teoremei (7.1) constă în a arăta că, ştiind că fibra generică este geometric integră, atunci există un deschis nevid V din Y astfel încît fibra $f^{-1}(y)$ să fie geometric integră pentru orice $y \in V$. Mai întîi este clar că problema este locală pe Y, şi deci putem presupune $Y = \mathrm{Spec}(A)$ o varietate afină şi nesingulară, cu A k-algebră de tip finit şi integră. Fie acum U un deschis afin nevid din X şi $g: U \to Y$ restricţia lui f la U. Vom arăta că dacă teorema este valabilă pentru g, atunci este valabilă şi pentru f.

Într-adevăr, fie V un deschis afin nevid din Y astfel încît pentru orice $y \in V$ fibra $g^{-1}(y) = f^{-1}(y) \cap U$ să fie geometric integră. Fie $F_1, \ldots, F_m$ componentele ireductibile ale lui $F = X - U$. Deoarece fiecare F_i nu conţine pe ξ, rezultă că F intersectează fibra generică $f^{-1}(\eta)$ după o submulţime închisă a lui $f^{-1}(\eta)$ diferită de

$f^{-1}(\eta)$. Teorema dimensiunii fibrelor (EGA IV, 13.1.1) implică atunci că există o submulţime deschisă nevidă V' a lui Y astfel încît pentru orice $y \in V'$ şi orice $x \in f^{-1}(y)$, $\dim_x f^{-1}(y) = \dim (f^{-1}(y) - F) = d$, unde $d = \dim (X) - \dim (Y) = \dim f^{-1}(\eta)$. Deoarece U este dens în X, rezultă atunci că $f^{-1}(y)$ este geometric ireductibilă dacă şi numai dacă $g^{-1}(y)$ este geometric ireductibilă. În plus, rezultă că orice fibră geometrică a lui f deasupra unui punct $y \in V \cap V'$ este ireductibilă şi generic redusă. Ca să deducem că această fibră geometrică este (gobal) redusă este suficient să observăm că ea nu are componente scufundate (cf. Altman-Kleiman [1], chap. VII, (2.2)). Or, acest fapt este adevărat deoarece $f^{-1}(y)$ este o schemă avînd toate inelele locale intersecţii complete (deoarece X şi Y sînt nesingulare).

Ne-am redus deci la cazul cînd $X = \mathrm{Spec}\,(B)$ şi $Y = \mathrm{Spec}\,(A)$ sînt afine, cu $A \subset B$ via f^*, şi extinderea corpurilor de fracţii respective $k(X)/k(Y)$ satisface ipotezele teoremei. Există atunci o bază de transcendenţă separantă $t_1, \ldots, t_d$ a lui $k(X)/k(Y)$ şi un element primitiv $t_{d+1} \in k(X)$ pentru extinderea finită şi separabilă $k(X)/k(Y)(t_1, \ldots, t_d)$, soluţie a polinomului ireductibil şi separabil

$$\varphi = T^r + a_1 T^{r-1} + \ldots + a_0,\ a_i \in k(Y)(t_1, \ldots, t_d).$$

Înmulţind eventual pe t_{d+1} cu un element convenabil din $k(Y)$, putem presupune în plus că $a_i \in A[t_1, \ldots, t_d]$. Deoarece X este biraţional izomorfă cu hipersuprafaţa $\varphi = \varphi(T_1, \ldots, T_d, T_{d+1}) = 0$ din $\mathbb{A}^{d+1}$, reducerea de mai sus ne permite să presupunem că ne reducem la cazul cînd $B = A[T_1, \ldots, T_{d+1}]/\varphi A[T_1, \ldots, T_{d+1}]$, cu $\varphi \in A[T_1, \ldots, T_{d+1}]$ polinom în $d+1$ variabile $T_1, \ldots, T_{d+1}$.

Ipoteza că fibra generică a lui f este geometric integră se traduce prin aceea că φ rămîne ireductibil şi peste închiderea algebrică $\overline{k(Y)}$ a lui $k(Y)$. Dacă $y \in Y = \mathrm{Spec}\,(A)$ este un punct, vom nota prin $\varphi_y(T_1, \ldots, T_{d+1})$ imaginea lui φ prin omomorfismul canonic $A[T_1, \ldots, T_{d+1}] \to k(y)[T_1, \ldots, T_{d+1}]$. Avem atunci de arătat că $\}y \in Y / \varphi_y$ este ireductibil peste $\overline{k(y)}\}$ conţine o submulţime deschisă a lui Y.

Fie n gradul (total) al lui φ şi $\alpha(p)$ $(p \geqslant 0)$ numărul monoamelor în $d+1$ variabile de grad $\leqslant p$. Pentru orice $p, q \geqslant 0$ astfel încît $p + q = n$ considerăm morfismul

$$u_{p,q} : \mathbb{A}^{\alpha(p)}(A) \times_A \mathbb{A}^{\alpha(q)}(A) \to \mathbb{A}^{\alpha(n)}(A).$$

dat de

$$((a_{i_0,\ldots,i_d}),(b_{j_0,\ldots,j_d}))\mapsto(c_{h_0,\ldots,h_d}),\text{ cu}$$

$$c_{h_0,\ldots,h_d}=\sum_{0\leq i_j\leq h_j}a_{i_0,\ldots,i_d}\,b_{h_0-i_0,\ldots,h_d-i_d},$$

corespunzător înmulţirii polinoamelor de grade p şi q, unde prin $\mathbb{A}^n(A)$ am notat spaţiul afin Spec $A[T_1,\ldots,T_n]$ peste A.

Este clar că dacă $y\in Y$, φ_y se descompune în factori de grade p şi q peste $\overline{k(y)}$ dacă şi numai dacă punctul din $\mathbb{A}^{\alpha(n)}(k(y))=\mathbb{A}^{\alpha(n)}(A)\otimes_k k(y)$ corespunzător lui φ_y este în imaginea morfismului

$$u_{p,q}\otimes_A k(y):\mathbb{A}^{\alpha(p)}(k(y))\otimes_{k(y)}\mathbb{A}^{\alpha(q)}(k(y))\to\mathbb{A}^{\alpha(n)}(k(y)).$$

Însă φ defineşte un morfism $\Phi:Y=\operatorname{Spec}(A)\to\mathbb{A}^{\alpha(n)}(A)$. Fie $Z=\bigcup_{p+q=n}$ Imaginea $(u_{p,q})$. Atunci după o teoremă a lui Chevalley, Z este o mulţime constructibilă, şi deci $\Phi^{-1}(Z)$ este de asemenea constructibilă. Cum punctul generic al lui Y nu aparţine lui $\Phi^{-1}(Z)$, există un deschis nevid V al lui Y disjunct de $\Phi^{-1}(Z)$. Cu aceasta demonstraţia teoremei (7.1) este completă.

Dacă în enunţul teoremei (7.1), Y este o curbă algebrică, atunci separabilitatea extinderii $k(X)/k(Y)$ este o consecinţă a faptului că $k(Y)$ este algebric închis în $k(X)$. Acest fapt rezultă din:

(7.2) LEMĂ. *Fie K un corp de funcţii algebrice de o variabilă peste un corp perfect k (adică K este o extindere finit generată a lui k de grad de transcendenţă 1), şi fie $L\supset K$ o extindere a lui K în care K este algebric închis. Atunci extinderea L/K este separabilă.*

Demonstraţie. Deoarece k este perfect există un element $f\in K$ astfel încît extinderea $K/k(f)$ să fie finită şi separabilă. Avem atunci $K^{1/p}=K(f^{1/p})$, unde $p=\operatorname{car}(k)>0$ (dacă $p=0$ nu avem nimic de dovedit). Într-adevăr, deoarece $K\subseteq K^{1/p}$, incluziunea $K(f^{1/p})\subseteq K^{1/p}$ este clară. Pe de altă parte, fie $g\in K$ un element primitiv al extinderii finite şi separabile $K/k(f)$. Atunci $K^{1/p}=k(f^{1/p})(g^{1/p})$ şi deoarece g este separabil peste $k(f)$, $g^{1/p}$ este de asemenea separabil peste $k(f^{1/p})$, deci $K^{1/p}=k(f^{1/p})(g)\subseteq K(f^{1/p})$, ceea ce termină de probat egalitatea $K^{1/p}=K(f^{1/p})$.

Acum a arăta că extinderea L/K este separabilă revine la a arăta că L şi $K^{1/p}$ sînt linear disjuncte peste K. Or, $f^{1/p}\notin L$ (deoarece K este algebric închis în L), şi deoarece $f\in K\subseteq L$, avem:

$$[L(f^{1/p}):L]=p=[K(f^{1/p}):K],$$

ceea ce încheie demonstraţia lemei (7.2).

(7.3) COROLAR. *Fie* $f: X \to Y$ *un morfism dominant de la varietatea ireductibilă și nesingulară* X *de dimensiune* $\geqslant 2$ *la curba ireductibilă* Y, *astfel încît* $k(Y)$ *să fie algebric închis în* $k(X)$. *Atunci, exceptînd un număr finit de puncte închise din* Y, *fibra* $f^{-1}(y)$ *este geometric integră.*

Demonstrația rezultă din (7.1) și (7.2).

(7.4) PROPOZIȚIE. *Fie* $f: X \to Y$ *un morfism dominant de varietăți ireductibile și nesingulare peste corpul* k *(algebric închis) de caracteristică zero. Atunci există un deschis nevid* $V \subseteq Y$ *astfel încît* $f/f^{-1}(V): f^{-1}(V) \to V$ *să fie un morfism neted, adică pentru orice* $y \in Y$ *fibra* $f^{-1}(y)$ *este geometric netedă de dimensiune pură* $=$ $\dim(X) - \dim(Y)$.

Demonstrație. Pasul 1. Fie $g: U \to V$ un morfism dominant de varietăți ireductibile peste k (cu $\mathrm{car}(k) = 0$). Atunci există un deschis nevid $U' \subseteq U$ astfel încît $g' = g/U': U' \to V$ să fie neted.

Demonstrația pasului 1. Înlocuind eventual pe U și V cu deschiși convenabili, putem presupune că U și V sînt varietăți nesingulare. Deoarece $k(U)$ este separabil generat peste $k(V)$, rezultă că $\Omega_{U/V}$ este local liber de rang $n = \dim(U) - \dim(V)$ în punctul generic al lui U în virtutea unui rezultat binecunoscut de algebră și a proprietății c) din demonstrația teoremei (7.1) privind localizarea. Rezultă că $\Omega_{U/V}$ este local liber de rang n într-un deschis U' nevid din U. Cum U și V sînt nesingulare, rezultă atunci că $g' = g/U'$ este neted.

Pasul 2. Fie $f: X \to Y$ un morfism de scheme algebrice peste k de caracteristică zero. Dacă pentru fiecare $r \geqslant 0$ notăm prin X_r mulțimea punctelor închise $x \in X$ astfel încît rang $(T_{f,x}) \leqslant r$, unde $T_{f,x}: T_{X,x} \to T_{Y,f(x)}$ este aplicația tangentă, atunci $\dim \overline{f(X_r)} \leqslant r$.

Demonstrația pasului 2. Fie V o componentă ireductibilă a lui $\overline{f(X_r)}$ și U o componentă ireductibilă a lui X_r astfel încît $f(U) \subseteq V$ și $\overline{f(U)} = V$. Dacă U și V sînt înzestrate cu structurile reduse respective, fie $g = f/U: U \to V$. După pasul 1 există un deschis U' în U astfel încît $g' = g/U': U' \to V$ să fie un morfism neted. Din construcție există un punct $x \in U' \cap X_r$. În diagrama comutativă

$$\begin{array}{ccc} T_{U',x} & \longrightarrow & T_{X,x} \\ \downarrow{\scriptstyle T_{g',x}} & & \downarrow{\scriptstyle T_{f,x}} \\ T_{V,f(x)} & \longrightarrow & T_{Y,f(x)} \end{array}$$

aplicațiile orizontale sînt injective (U' și V sînt subscheme local închise în X și Y respectiv). Însă deoarece rang $(T_{f,x}) \leqslant r (x \in X_r)$

şi $T_{g',x}$ este surjectivă (g' este neted), rezultă că dim $(T_{V,f(x)}) \leqslant r$, şi deci dim $(V) \leqslant r$.

Pasul 3. Concluzia propoziţiei. Fie $r = \dim(Y)$ şi X_{r-1} submulţimea din pasul 2. După pasul 2 $\dim (\overline{f(X_{r-1})}) \leqslant r - 1$, deci scoţînd $\overline{f(X_{r-1})}$ din Y, putem presupune că rang $(T_{f,x}) \geqslant r$ pentru fiecare punct închis al lui X. Deoarece Y este nesingulară şi de dimensiune r, rezultă că $T_{f,x}$ este surjectivă pentru orice $x \in X$ închis. Altfel spus, f este neted. Q.E.D.

(7.5) Definiţie. Fie $f : X \to B$ un morfism surjectiv de la suprafaţa X la curba nesingulară (şi proiectivă) B. Vom mai spune că f este o fibrare de bază curba B. Fibrarea f se numeşte *minimală* dacă pentru fiecare $b \in B$, fibra $F_b = f^{-1}(b) = X \times_B \mathrm{Spec}\,(k(b))$ nu conţine nici-o curbă excepţională de prima specie drept componentă.

Observăm că dacă $f : X \to B$ este o fibrare, atunci f este totdeauna morfism plat (deoarece B este curbă nesingulară) şi deci (ţinînd cont de teoremele de schimbare a bazei, vezi Mumford [2], §5, sau EGA III (2)), funcţia $b \to p_a(F_b)$ este constantă. Această proprietate justifică de fapt denumirea de fibrare.

Fie $f : X \to B$ o fibrare cu proprietatea $f_* O_X = O_B$. După teorema de conexiune a lui Zariski (EGA III 4.3.2) toate fibrele lui f sînt conexe. Cum condiţia $f_* O_X = O_B$ este echivalentă (în cazul cînd B este curbă nesingulară) cu condiţia ca $k(B)$ să fie algebric închis în $k(X)$, din (7.3) rezultă că exceptînd un număr finit de puncte închise din B, toate fibrele corespunzătoare celorlalte puncte din B sînt curbe integre.

(7.6) Definiţie. Fibrarea f se numeşte *eliptică* dacă f este minimală, $f_* O_X = O_B$ şi dacă aproape toate fibrele lui f (exceptînd un număr finit de fibre închise) sînt curbe nesingulare eliptice. Fibrarea f se numeşte *cvasieliptică* dacă f este minimală, $f_* O_X = O_B$ şi aproape toate fibrele lui f sînt curbe integre cu singularităţi şi de gen aritmetic unu.

Deci o fibrare $f : X \to Y$ cu proprietăţile f minimală şi $f_* O_X = O_B$ este eliptică sau cvasieliptică dacă $p_a(F_b) = 1$ pentru un $b \in B$. Dacă toate fibrele lui f sînt curbe cu singularităţi, atunci f este cvasieliptică. Dacă există o fibră F_b nesingulară, atunci morfismul f este generic neted şi deci fibrarea f este eliptică. Propoziţia (7.4) arată că în caracteristică zero nu pot apărea fibrări cvasieliptice. În finalul acestui paragraf vom demonstra că fibrările cvasieliptice pot apărea numai în caracteristică 2 sau 3, iar aproape toate fibrele unei fibrări cvasieliptice sînt curbe raţionale cu cîte un singur punct cuspidal ordinar drept singularitate. Fibrările eliptice şi cvasieliptice joacă un rol central în clasificarea suprafeţelor.

Fie $f: X \to B$ o fibrare eliptică sau cvasieliptică şi $D = F_b = \sum_{i=1}^{p} n_i E_i$, cu $b \in B$ punct închis, $p \geq 1$, $n_i \geq 1$ şi $E_1, \ldots, E_p$ componentele integre ale lui D astfel încît $E_i \neq E_j$ pentru $i \neq j$. Dacă K este un divizor canonic pe X, atunci $(D \cdot E_i) = (K \cdot E_i) = 0$ pentru orice $i = 1, \ldots p$. Într-adevăr, dacă F este o fibră a lui f diferită de D, atunci $F \approx D$ şi deci $(D \cdot E_i) = (F \cdot E_i) = 0$ pentru orice i, deoarece $\mathrm{Supp}\,(F) \cap E_i = \emptyset$. Pe de altă parte, formula genului arată că $2p_a(D) - 2 = (D^2) + (D \cdot K)$, de unde, ţinînd cont că $p_a(D) = 1$ şi $(D^2) = 0$, rezultă $(D \cdot K) = 0$, deci $\sum_{i=1}^{p} n_i(K \cdot E_i) = 0$. Dacă $p = 1$ şi $n_1 \geq 1$, atunci $(K \cdot E_1) = 0$. Dacă $p \geq 2$, atunci din (2.6) rezultă $(E_i^2) < 0$ pentru orice $i = 1, \ldots, p$. Însă avem $(K \cdot E_i) \geq 0$ pentru orice i, deoarece dacă pentru un i $(K \cdot E_i) < 0$, cum avem şi $(E_i^2) < 0$, rezultă imediat că E_i este curbă excepţională de prima specie, ceea ce contrazice minimalitatea lui f. În fine relaţiile $\sum_{i=1}^{p} n_i \cdot (K \cdot E_i) = 0$ şi $(K \cdot E_i) \geq 0$ pentru orice i implică şi $(K \cdot E_i) = 0$ pentru orice i, şi afirmaţia de mai sus este dovedită. Această observaţie conduce la:

(7.7) DEFINIŢIE. Fie X o suprafaţă minimală şi $D = \sum_{i=1}^{p} n_i E_i > 0$ un divizor efectiv. Vom spune că D este *divizor* (sau curbă) *de tip canonic* dacă $(K \cdot E_i) = (D \cdot E_i) = 0$ pentru orice $i = 1, \ldots, p$. Dacă în plus D este conex şi cel mai mare divizor comun al numerelor $n_1, \ldots, n_p$ este egal cu 1, atunci vom spune că D este *divizor* (sau curbă) *indecompozabil* (ă) de tip canonic.

Din cele de mai sus rezultă că dacă o suprafaţă minimală X posedă o structură de fibrare eliptică sau cvasieliptică $f: X \to B$, atunci există pe X cel puţin o curbă indecompozabilă de tip canonic.

(7.8) TEOREMĂ. *Fie* $D = \sum_{i=1}^{p} n_i E_i > 0$ *o curbă indecompozabilă de tip canonic pe suprafaţa minimală* X *şi* L *un* O_D*-modul inversibil. Dacă pentru orice* $i = 1, \ldots, p$ $\deg(L \otimes O_{E_i}) = 0$, *atunci* $H^0(D, L) \neq 0$ *dacă şi numai dacă* $L \cong O_D$. *În plus* $H^0(D, O_D) = k$.

Demonstraţie. Va fi suficient să arătăm că orice secţiune nenulă $s \in H^0(D, O_D)$ generează pe L, adică defineşte un izomorfism al lui O_D pe L. De aici va rezulta şi faptul că $H^0(D, O_D)$ este corp, de unde $H^0(D, O_D) = k$ deoarece extinderea $H^0(D, O_D)/k$ este finită şi k algebric închis.



Fie $s_i = s/E_i \in H^0(E_i, L \otimes O_{E_i})$. Cum $\deg (L \otimes O_{E_i}) = 0$, atunci s_i este sau identic nulă, sau s_i nu se anulează nicăieri (în care caz s_i generează pe $L \otimes O_{E_i}$). Dacă s_i este identic nulă pe o componentă E_i, atunci s_j este de asemenea identic nulă pentru orice j deoarece D este curbă conexă. Prin urmare, dacă s_i nu se anulează nicăieri pe E_i, atunci s nu se anulează nicăieri pe D, deci s generează pe L şi totul este dovedit în acest caz.

Presupunem deci că s este identic nulă pe E_i pentru orice i. Fie k_i ordinul de anulare al lui s pe E_i. Aceasta înseamnă că

$$s \in \operatorname{Ker} (H^0(D, L) \to H^0(k_i E_i, L_{k_i E_i})).$$

şi dacă $k_i < n_i$, atunci

$$s \notin \operatorname{Ker} (H^0(D, L) \to H^0((k_i + 1)E_i, L_{(k_i+1)E_i})),$$

unde dacă $Z \subset D$ este o subschemă închisă a lui D, am notat prin $L_Z = L \otimes O_Z$. În orice caz avem pentru orice i inegalităţile $1 \leqslant \leqslant k_i \leqslant n_i$.

Presupunem mai întîi că $k_i < n_i$. Atunci din diagrama comutativă cu linia orizontală exactă:

(7.8.1)

$$\begin{array}{ccccc} & & H^0(L) & & \\ & & \downarrow & \searrow & \\ 0 \to H^0(E_i, L \otimes (O_X(-k_i E_i)/O_X(-(k_i+1)E_i))) & \to & H^0(L_{(k_i+1)E_i}) & \to & H^0(L_{k_i E_i}) \end{array}$$

rezultă că s defineşte o secţiune nenulă în $H^0(E_i, L \otimes (O_X(-k_i E_i)/ /O_X(-(k_i + 1)E_i)))$. Această secţiune se anulează în fiecare punct $P \in E_i$ cu ordinul $\geqslant$ multiplicitatea de intersecţie $\left(E_i \cdot \sum_{j \neq i} k_j E_j\,;\, P\right)$.

Într-adevăr, problema fiind locală în P presupunem pentru simplitate că E_i este tăiată în P de o singură componentă E_j cu $j \neq i$ (cazul general se tratează absolut la fel). Fie $A = O_{X,P}$, $t_i = 0$ (resp. $t_j = 0$) o ecuaţie locală a lui E_i (resp. a lui E_j) în P. Avem diagrama comutativă analogă lui (7.8.1):

$$\begin{array}{ccccc} & & s \in A/(t_i^{n_i} \cdot t_j^{n_j}) & & \\ & & \downarrow & \searrow & \\ 0 \to A/(t_i) & \xrightarrow{t_i^{k_i}} & A/(t_i^{k_i+1}) & \to & A/(t_i^{k_i}) \to 0 \end{array}$$

Din relațiile $s = t_i^{k_i} \cdot \lambda = t_j^{k_j} \cdot \mu$, cu $\lambda, \mu \in A$, deducem ținînd cont că t_i, t_j este un A-șir: $\mu = t_i^{k_i} \cdot \mu'(\mu' \in A)$, deci $\lambda = t_j^{k_j} \cdot \mu'$. Secțiunea s este reprezentată de $\overline{\lambda} = \lambda \bmod (t_i) = t_j^{k_j} \cdot \mu' \bmod (t_i)$. Atunci $\operatorname{ord}_P(\overline{\lambda}) = \dim(A/(t_i, \lambda)) = \dim(A/(t_i, t_j^{k_j} \cdot \mu')) \geqslant \dim(A/(t_i, t_j^{k_j})) =$ $=$ multiplicitatea de intersecție $(E_i, k_j E_j; P)$ și inegalitatea de mai sus este dovedită.

Rezultă atunci că dacă $k_i < n_i$, avem:

$$(E_i \cdot \sum_{j \neq i} k_j E_j) \leqslant \deg_{E_i}(L \otimes (O_X(-k_i E_i)/O_X(-(k_i+1)E_i))) =$$

(7.8.2)

$$= k_i \cdot \deg(O_X(-E_i)/O_X(-2E_i)) = -k_i \cdot (E_i^2),$$

fiindcă $\deg(L_{E_i}) = 0$.

Pe de altă parte, dacă $k_i = n_i$, atunci deoarece $(E_i \cdot D) = 0$, avem:

$$(7.8.3) \qquad (E_i \cdot \sum_j k_j E_j) = -(E_i \cdot \sum_{j \neq i} (n_j - k_j) E_j) \leqslant 0,$$

deoarece $n_i - k_i = 0$ și pentru $i \neq j$, $(E_i \cdot E_j) \geqslant 0$.

Prin urmare dacă notăm prin $D_1 = \sum_j k_j E_j$, atunci din (7.8.2) și (7.8.3) deducem $(D_1 \cdot E_i) \leqslant 0$ pentru orice i. Însă $\sum_i n_i(D_1 \cdot E_i) =$ $= (D \cdot D_1) = \sum_i k_i(D \cdot E_i) = 0$, și deci $(D_1 \cdot E_i) = 0$ pentru orice i. Aceasta arată că $D - D_1$ și D_1 sînt curbe de tip canonic.

Afirmăm că fracțiile k_i/n_i nu depind de indicele i. Într-adevăr, notînd prin $a/b = \max_i (k_i/n_i)$, fie $Z = aD - bD_1$. Atunci $Z =$ $= \sum_j (an_j - bk_j)E_j$, deci Z este un divizor efectiv în care nu apar componentele E_i pentru care $a/b = k_i/n_i$. Cum cel puțin o astfel de componentă există, rezultă că Z nu conține nici-o componentă E_j care intersectează pe E_i, deoarece $(Z \cdot E_i) = a(D \cdot E_i) - b(D_1 \cdot E_i) = 0$. Cum D este conex, rezultă prin inducție că $Z = 0$ și afirmația este dovedită.

Deoarece cel mai mare divizor comun al lui $n_1, \ldots, n_p$ este 1, există $a_1, \ldots, a_p \in \mathbb{Z}$ astfel încît $\sum_i a_i n_i = 1$, de unde deducem:

$$a/b = a_1 k_1/a_1 n_1 = \ldots = a_p k_p/a_p n_p = \sum_i a_i k_i / \sum_i a_i n_i = \sum_i a_i k_i \in \mathbb{Z},$$

şi deci $a/b \geqslant 1$. Cum avem şi $a/b \leqslant 1$, rezultă $a = b$, adică $D_1 = D$. Altfel spus, $s(x) \neq 0$ $\forall x \in D$ şi teorema (7.8) este demonstrată.

(7.9) COROLAR. *Dacă D este o curbă indecompozabilă de tip canonic, atunci $\omega_D \cong O_D$, unde ω_D este fasciculul dualizant al lui D.*

Demonstraţie. După dualitatea Serre, $\dim H^1(\omega_D) = \dim H^0(O_D) = 1$. Din şirul exact

$$0 \to O_X(K) \to O_X(K + D) \to \omega_D \to 0$$

şi din teorema lui Riemann-Roch deducem $\chi(\omega_D) = \chi(O_X(K + D)) - \chi(O_X(K)) = 1/2(K + D \cdot D) = 0$. Deci $\dim H^0(\omega_D) = 1$. Teorema (7.8) implică atunci că $\omega_D \cong O_D$, deoarece $\deg(\omega_D/E_i) = (K + D \cdot E_i) = 0$ pentru orice i. Q.E.D.

(7.10) COROLAR. *Dacă $D = \sum_{i=1}^{p} n_i E_i$ este o curbă indecompozabilă de tip canonic şi dacă D' este un divizor efectiv pe X astfel încît $(D' \cdot E_i) = 0$ pentru orice $i = 1, \ldots, p$, atunci $D' = nD + D''$, unde $n \geqslant 0$ şi D'' este un divizor efectiv* cu $\operatorname{Supp}(D'') \cap \operatorname{Supp}(D) = \emptyset$.

Demonstraţie. Fie n numărul natural cu proprietăţile $D' - nD \geqslant 0$ şi $D' - (n+1)D \not\geqslant 0$. Punînd $D'' = D' - nD$, avem şirul exact

$$0 \to O_X(D'' - D) \to O_X(D'') \to O_D(D'') = L \to 0.$$

Fie $s \in H^0(X, O_X(D''))$ cu $\operatorname{div}_X(s) = D''$. Atunci deoarece $D'' - D = D' - (n+1)D \not\geqslant 0$, imaginea $\tilde{s}$ a lui s în $H^0(D, L)$ este nenulă. Pe de altă parte, deoarece $\deg(L/E_i) = (D'' \cdot E_i) = (D'' \cdot E_i) - n(D \cdot E_i) = 0$ pentru orice i, teorema (7.8) implică $L \cong O_D$. Prin urmare $s(x) \neq 0$ pentru orice $x \in D$, adică $\operatorname{Supp}(D'') \cap \operatorname{Supp}(D) = \emptyset$. Q.E.D.

(7.11) TEOREMĂ. *Fie X o suprafaţă minimală cu $(K^2) = 0$ şi $(K \cdot C) \geqslant 0$ pentru orice curbă C de pe X. Dacă D este o curbă indecompozabilă de tip canonic pe X, atunci există o structură $f: X \to B$ de fibrare eliptică sau cvasieliptică pe X (evident, şi reciproc). Mai exact, există un număr natural n astfel încît factorizarea Stein a morfismului $\varphi_{|nD|}: X \to |nD|$ să fie un fascicul de curbe de tip canonic (adică o fibrare eliptică sau cvasieliptică).*

Demonstraţie. Cazul $p_g = 0$. Din (7.9) avem pentru orice $n \geqslant 0$ şirul exact:

$$(7.11.1)\quad 0 \to O_X(nK + (n-1)D) \to O_X(nK + nD) \to O_D \to 0$$

în care avem $H^2(O_X(nK+(n-1)D))=0$ pentru orice $n \geqslant 2$. Într-adevăr, folosind dualitatea Serre totul revine la a arăta că $H^0(O_X(-p(K+D)))=0$ pentru orice $p \geqslant 1$, sau încă $|-p(K+D)|=\emptyset$ pentru $p \geqslant 1$. Dacă prin absurd ar exista un $\Delta \geqslant 0$, $\Delta \sim -p(K+D)$, deosebim următoarele situaţii:

a) $\Delta = 0$, deci $p(K+D) \sim 0$, sau $pK \sim -pD$. Fie atunci C o curbă ireductibilă astfel încît $(D \cdot C) > 0$. Atunci $(K \cdot C) = 1/p\,(pK \cdot C) = -1/p\,(p\,D \cdot C) = -(D \cdot C) < 0$, fapt ce contrazice ipotezele teoremei.

b) $\Delta > 0$. Fie C o curbă ireductibilă astfel încît $(\Delta \cdot C) > 0$. Avem $(\Delta \cdot C) = -p(K \cdot C) - p(D \cdot C) \leqslant 0$, deoarece prin ipoteză $(K \cdot C) \geqslant 0$ şi $(D \cdot C) \geqslant 0$ (deoarece D este curbă de tip canonic). Aceasta reprezintă o contradicţie şi în acest caz.

Din $H^2(O_X(nK+(n-1)D)=0$ şi şirul exact (7.11.1) deducem şirul exact de coomologie

$$0 \to H^2(O_X(nK+nD)) \to H^2(O_D)=0,$$

şi deci, pentru orice $n \geqslant 2$, avem $H^2(O_X(nK+nD))=0$. Cum $H^1(O_D)=H^0(\omega_D)=H^0(O_D)\neq 0$ (cf. (7.9)) obţinem $H^1(O_X(nK+nD))\neq 0$. Teorema Riemann-Roch ne dă:

$$\chi(O_X(nK+nD)) = \chi(O_X) = 1-q.$$

Ţinînd cont de (5.1) formula lui Noether devine: $10-8q=b_2$, de unde $q \leqslant 1$. Prin urmare am obţinut

$$\chi(O_X(nK+nD)) = 0 \text{ sau } 1 \text{ pentru } n \geqslant 2.$$

Cum am văzut că $H^1(O_X(nK+nD))=0$ şi $H^2(O_X(nK+nD))=0$, rezultă $H^0(O_X(nK+nD))\neq 0$ pentru $n \geqslant 2$, altfel spus, dacă $n \geqslant 2$, există un $D_n \in |nK+nD|$. Din a) deducem că nu putem avea $D_n=0$. Afirmăm că D_n este de tip canonic.

Într-adevăr, fie $D_n=\sum_i n_i E_i$; atunci $(D_n \cdot E_i) = n(K \cdot E_i) + n(D \cdot E_i) = 0$ pentru orice i, deci după (7.10) putem scrie $D_n = aD + \sum_j k_j F_j$, $a \geqslant 0$, $k_j > 0$, iar F_j sînt curbe (distincte două cîte două) ce nu taie pe D. Însă cum $(K \cdot F_j) \geqslant 0$ pentru orice j, iar $\sum_j k_j(K \cdot F_j) = (K \cdot \sum_j k_j F_j + aD) = (K \cdot nK + nD) = 0$, rezultă $(K \cdot F_j) = 0$ pentru orice j. În fine, $(D_n \cdot F_j) = n(K \cdot F_j) + n(D \cdot F_j) = 0$ pentru orice j deoarece $\mathrm{Supp}\,(D) \cap F_j = \emptyset$ şi afirmaţia este dovedită.

Observăm acum că nu putem avea pentru orice $n \geq 2$ $D_n = a_n D$ cu a_n întreg ≥ 0, deoarece în caz contrar am avea $nK \sim \lambda_n D$ cu λ_n întreg şi $n \geq 2$. Luînd $n = 2$ şi $n=3$, obţinem $K = 3K - 2K \sim (\lambda_3 - \lambda_2) D = \lambda D$. Dacă $\lambda < 0$, atunci există o curbă ireductibilă C astfel încît $(D \cdot C) > 0$, deci $(K \cdot C) < 0$, absurd. Dacă $\lambda \geq 0$, atunci $|K| = |\lambda D| \neq \emptyset$ şi deci $p_g > 0$, din nou absurditate.

În acest fel am demonstrat că pe X există cel puţin o curbă D' indecompozabilă de tip canonic ce nu taie pe D. Aplicînd din nou (7.9) putem scrie şirul exact:

$$0 \to O_X(2K + D + D') \to O_X(2K + 2D + 2D') \to O_D \oplus O_{D'} \to 0.$$

Raţionînd exact ca mai înainte deducem că $H^2(O_X(2K + D + D')) = 0$ şi deci $H^2(O_X(2K + 2D + 2D')) = 0$, şi deoarece $H^1(O_D \oplus O_{D'})$ are dimensiunea 2, avem $\dim H^1(O_X(2K + 2D + 2D')) \geq 2$, iar cu teorema Riemann-Roch găsim $\chi(O_X(2K + 2D + 2D')) = \chi(O_X) = 0$ sau 1, de unde deducem:

$$\dim H^0(O_X(2K + 2D + 2D')) \geq 2.$$

Fie atunci $\Delta \in |2K + 2D + 2D'|$. Avem $\Delta > 0$, $(\Delta^2) = 0$ şi $\dim |\Delta| \geq 1$. În plus, deoarece D şi D' sînt de tip canonic, Δ rezultă tot de tip canonic. În aceste condiţii rezultă că sistemul linear complet $|\Delta|$ este compus cu un fascicul de curbe.

Într-adevăr, dacă C este partea fixă a lui $|\Delta|$, atunci din (2.6) şi din faptul că Δ este de tip canonic deducem $((\Delta - C)^2) \leq 0$. Altfel spus, aplicaţia raţională $\varphi_{|\Delta|} : X \to \varphi_{|\Delta|}(X) = B \subseteq |\Delta|$ este peste tot definită, deoarece în caz contrar am avea $((\Delta - C)^2) > 0$. Deoarece $\dim |\Delta| \geq 1$, B nu poate fi un punct. De asemenea, B nu poate fi nici suprafaţă, deoarece în caz contrar $\Delta - C = \varphi^*(H)$ cu H secţiune hiperplană pe B, de unde $((\Delta - C)^2) = [k(X) : k(B)](H^2) > 0$. Deci $|\Delta|$ este într-adevăr compus cu un fascicul şi $\varphi_{|\Delta|}$ este un morfism.

Din $(D \cdot \Delta) = (D \cdot 2K + 2D + 2D') = 0$, $(D \cdot \Delta - C) \geq 0$ şi $(D \cdot C) \geq 0$ rezultă că $(D \cdot \Delta - C) = 0$. Cum D este conexă deducem că D este conţinută în una din fibrele lui $\varphi_{|\Delta|}$. Aplicînd (2.6) şi ţinînd cont că $(D^2) = 0$ deducem că un multiplu raţional de D coincide cu una din fibrele morfismului $f : X \to B'$, unde f este morfismul dedus din $\varphi_{|D|}$ via factorizarea Stein (deci B' este normalizata curbei B în corpul $k(X)$). Deoarece cel mai mare divizor comun al coeficienţilor componentelor lui D este 1, atunci una din fibrele lui f este chiar un multiplu întreg (şi pozitiv) de D. În par-

ticular, genul aritmetic al respectivei fibre (a lui f) este 1, şi deci f este fibrare eliptică sau cvasieliptică. Teorema (7.11) este demonstrată în cazul cînd $p_g = 0$.

Cazul $p_g > 0$. La fel ca la cazul precedent, este suficient să arătăm că dimensiunea k-spaţiului vectorial $H^0(O_X(\Delta))$ este $\geqslant 2$ pentru un divizor Δ de tip canonic. Mai exact, vom arăta că există un $n > 0$ astfel încît dim $H^0(O_X(nD)) \geqslant 2$.

Fie $F_n = O_X(nD)/O_X$. Şirul exact $H^0(O_X(nD)) \to H^0(F_n) \to H^1(O_X)$ arată că este suficient să probăm că dim $H^0(F_n) \to \infty$ cînd $n \to \infty$. Notînd $L = F_1$, atunci L este inversibil pe D, iar din şirul exact

$$(7.11.2) \qquad 0 \to F_{n-1} \to F_n \to L^n \to 0$$

deducem că funcţia $n \mapsto$ dim $H^0(F_n)$ este crescătoare. Din teorema Riemann-Roch rezultă $\chi(O_X(nD)) = \chi(O_X)$, de unde, folosind aditivitatea caracteristicii Euler-Poincaré, $\chi(F_n) = 0$ pentru orice $n > 0$.

În şirul exact $H^1(F_n) \to H^2(O_X) \to H^2(O_X(nD))$ avem $H^2(O_X(nD)) = 0$ pentru $n \gg 0$, deoarece folosind dualitatea Serre totul revine la a arăta că $|K - nD| = \emptyset$ pentru n suficient de mare. Or acest fapt rezultă din următoarea observaţie generală:

(7.11.3) *Observaţie.* Dacă Δ este un divizor arbitrar pe suprafaţa X şi $D > 0$ este un divizor strict pozitiv, atunci $|\Delta - nD| = \emptyset$ pentru n suficient de mare.

Într-adevăr, pentru orice $n \geqslant 1$ avem $|\Delta - (n+1)D| \subseteq \subseteq |\Delta - nD|$ (via aplicaţia $D' \mapsto D' + D$, $D' \in |\Delta - (n+1)D|$), deci există un $n_0 > 0$ astfel încît $|\Delta - n_0 D| = |\Delta - (n_0 + s) D|$ pentru orice $s \geqslant 1$. Dacă enunţul observaţiei ar fi fals, ar rezulta că $|\Delta - n_0 D| \neq \emptyset$. Atunci orice divizor $F \in |\Delta - n_0 D|$ s-ar putea scrie sub forma $F = sD + F'$, cu $F' \in |\Delta - (n_0 + s)D|$ pentru orice $s \geqslant 1$, ceea ce este evident absurd. Observaţia (7.11.3) este deci dovedită.

Revenind la demonstraţia teoremei (7.11) (cazul $p_g > 0$), deducem, ţinînd cont că $p_g =$ dim $H^2(O_X) > 0$, $H^1(F_n) \neq 0$ pentru n suficient de mare, şi prin urmare dim $H^0(F_n) =$ dim $H^1(F_n) \neq 0$ pentru $n \gg 0$.

Presupunem prin absurd că şirul $\{\dim H^0(F_n)\}_n$ este mărginit superior, şi fie n cel mai mare număr natural pentru care dim $H^0(F_{n-1}) <$ $<$ dim $H^0(F_n)$. Din şirul exact (7.11.2) deducem că L^n are o secţiune globală nenulă ce provine dintr-o secţiune $s \in H^0(F_n)$. Cum D este curbă indecompozabilă de tip canonic, iar L^n are gradul zero pe fiecare componentă a lui D, corolarul (7.9) implică că s/D nu se anulează în nici-un punct al lui D ($L^n \cong O_D$), deci s nu se anulează în

nici-un punct al lui D. Cum $\mathrm{Supp}(F_n) = D$, rezultă că s generează pe F_n peste tot ca O_X-modul. Altfel spus, s definește un omomorfism surjectiv de O_X-module $O_X \to F_n$ al cărui nucleu este exact $O_X(-nD)$. Am găsit deci izomorfismul $O_X/O_X(-nD) \cong F_n = O_X(nD)/O_X$. Luînd puteri tensoriale de ordin $m \geqslant 1$ ale lui F_n deducem izomorfismele:

$$O_X/O_X(-nD) \cong F_n \cong O_X(mnD)/O_X(n(m-1)\,D) \cong F_{nm}/F_{n(m-1)}.$$

Aceste izomorfisme ne permit să scriem diagrama comutativă cu liniile și coloanele exacte:

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & 0 & & 0 & & \\
 & & & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & O_X & \longrightarrow & O_X(n(m-1)\,D) & \longrightarrow & F_{n(m-1)} & \longrightarrow & 0 \\
 & & \| & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & O_X & \longrightarrow & O_X(nmD) & \longrightarrow & F_{nm} & \longrightarrow & 0 \\
 & & & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & & & F_n & = & F_n & & \\
 & & & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & & & 0 & & 0 & &
\end{array}$$

din care deducem diagrama comutativă cu liniile și coloanele exacte:

$$\begin{array}{ccccccc}
H^1(F_{n(m-1)}) & \xrightarrow{\alpha} & H^1(F_{nm}) & \longrightarrow & H^1(F_n) & \longrightarrow & 0 \\
\downarrow & & \downarrow & & & & \\
H^2(O_X) & = & H^2(O_X) & & & & \\
\downarrow & & \downarrow & & & & \\
0 = H^2(O_X(n(m-1)\,D)) & & 0 = H^2(O_X(nmD)) & \text{pentru } m \gg 0. & & &
\end{array}$$

Rezultă că aplicația α este nenulă (deoarece $H^2(O_X) \neq 0$), și deci $\dim H^1(F_{nm}) = \dim \mathrm{Im}(\alpha) + \dim H^1(F_n) > \dim H^1(F_n)$, inegalitate ce contrazice modul de alegere a lui n. Astfel demonstrația teoremei este completă și în cazul $p_g > 0$. Q.E.D.

(7.12) TEOREMĂ. *Fie X o suprafaţă minimală cu $(K^2) = 0$ şi $(K \cdot C) \geqslant 0$ pentru orice curbă C de pe X. Atunci sau $2K \sim 0$, sau X conţine cel puţin o curbă indecompozabilă de tip canonic.*

Demonstraţie. Dacă $|2K| \neq \emptyset$, fie $D \in |2K|$; atunci sau $D = 0$, deci $2K \sim 0$, sau $D = \sum_{i=1}^{p} n_i E_i > 0$, cu E_i componentele integre (distincte două cîte două) ale lui D. În al doilea caz avem $(D \cdot K) = 2(K^2) = 0$, deci $0 = (D \cdot K) = \sum_{i=1}^{p} n_i (K \cdot E_i)$. Cum însă $(K \cdot E_i) \geqslant 0$ (prin ipoteză), rezultă $(K \cdot E_i) = 0$ pentru orice i. De asemenea, $(D \cdot E_i) = 2(K \cdot E_i) = 0$ pentru orice i altfel spus D este de tip canonic. În particular, X conţine o curbă indecompozabilă de tip canonic.

Rămîne deci de analizat cazul $|2K| = \emptyset$. Din teorema Riemann-Roch deducem, ţinînd cont că $(K^2) = 0$:

$$\dim |2K| + \dim |-K| \geqslant \chi(O_X) - 2.$$

Însă $p_2 = \dim H^0(\omega_X^2) = 0$ implică $p_1 = p_g = 0$, şi deoarece $\dim |2K| = -1$, deducem inegalitatea $\dim |-K| \geqslant -q$. Dacă $q = 0$, atunci $|-K| \neq \emptyset$ şi deci există un $D \in |-K|$. Cum $D = 0$ implică $2K \sim 0$, ceea ce contrazice faptul că $|2K| = \emptyset$, rezultă că $D > 0$. Fie atunci H o secţiune hiperplană pe X astfel încît $(H \cdot D) > 0$. Avem $(K \cdot H) = -(D \cdot H) < 0$, ceea ce contrazice ipotezele teoremei (7.12).

Am demonstrat deci că în cazul $|2K| = \emptyset$, avem $q \geqslant 1$, $p_g = 0$. Ţinînd cont de (5.1), formula lui Noether devine $10 - 8q = b_2$, de unde $q = 1$. Fie atunci $f : X \to B = \mathrm{Alb}(X)$ morfismul Albanese. Avem, după (5.3), $\dim(B) = q = 1$. Deci B este o curbă eliptică şi f este un morfism surjectiv (altfel f ar fi constant şi deci nu ar putea genera pe B, vezi Serre [4]). Fie F_b fibra $f^{-1}(b)$ cu $b \in B$. Dacă am avea $p_a(F_b) = 0$, formula genului ar implica, ţinînd cont că $(F_b^2) = 0$:

$$(K \cdot F_b) = -2,$$

ceea ce ar contrazice ipotezele teoremei.

Dacă $p_a(F_b) = 1$, atunci F_b ar fi o curbă de tip canonic şi nu am mai avea nimic de demonstrat. Presupunem deci $p_a(F_b) \geqslant 2$, de unde (formula genului) $(K \cdot F_b) = 2p_a(F_b) - 2 > 2$. Pentru orice punct închis $a \in B - \{b\}$, cu $b \in B$ punct închis fixat al lui B, considerăm şirul exact:

$$0 \to O_X(2K + F_a - F_b) \to O_X(2K + F_a) \to O_{F_b}(2K \cdot F_b) \to 0.$$

Avem $|F_b - F_a - K| = \emptyset$ deoarece dacă ar exista un $0 \leqslant D \sim F_b - F_a - K$, atunci $K \sim F_b - F_a - D$, deci $(K \cdot F_b) = (F_b^2) - (F_a \cdot F_b) - (D \cdot F_b) = -(D \cdot F_b) \leqslant 0$ (deoarece toate fibrele lui f sînt numeric echivalente între ele şi $D \geqslant 0$), inegalitate ce contrazice inegalitatea obţinută mai sus. Prin urmare, după dualitatea Serre, $H^2(O_X(2K + F_a - F_b)) = 0$, iar după teorema Riemann-Roch, $\chi(O_X(2K + F_a - F_b)) = \chi(O_X) = 1 - q + p_g = 0$. Rezultă că pentru orice $a \in B - \{b\}$ avem una din posibilităţile:

a) $|2K + F_a - F_b| \neq \emptyset$, sau

b) $H^i(O_X(2K + F_a - F_b)) = 0$ pentru orice $i = 0, 1, 2$, adică omomorfismul de restricţie $H^0(O_X(2K + F_a)) \to H^0(O_{F_b}(2K \cdot F_b))$ este un izomorfism.

Presupunem acum că $|2K + F_a - F_b| = \emptyset$ pentru orice $a \in B$. Atunci fixînd o secţiune nenulă $s \in H^0(O_{F_b}(2K \cdot F_b))$ (o asemenea secţiune există întotdeauna deoarece F_b este o curbă de gen aritmetic $\geqslant 2$ şi $\deg(2K \cdot F_b) = 2(K \cdot F_b) = 4p_a(F_b) - 4$), notăm cu $\Delta = \mathrm{div}_{F_b}(s)$. Pentru orice $a \in B - \{b\}$, secţiunea s se ridică în mod unic la o secţiune $s_a \in H^0(O_X(2K + F_a))$, şi fie $D_a = \mathrm{div}_X(s_a)$. Obţinem o familie algebrică $\{D_a\}_{a \in B - \{b\}}$ de divizori efectivi, parametrizată după curba $B - \{b\}$, astfel încît $D_a \cdot F_b = \Delta$. În plus, dacă $a, a' \in B - \{b\}$, $a \neq a'$, atunci D_a nu poate fi linear echivalent cu $D_{a'}$, deoarece în caz contrar ar rezulta că $F_a \sim F_{a'}$ (din $2K + F_a \sim 2K + F_{a'}$), de unde, pe curba eliptică B, $a \sim a'$, lucru evident absurd. În particular, dacă $a \neq a'$, atunci $D_a \neq D_{a'}$. În aceste condiţii X coincide cu închiderea submulţimii $\bigcup_{a \neq b} D_a$. Atunci divizorul D_b, specializarea lui D_a cînd $a \mapsto b$, trebuie să conţină pe F_b drept componentă, deci $D_b = F_b + D_b'$, cu $D_b' \geqslant 0$. Însă deoarece $D_b \in |2K + F_b|$, obţinem că $D_b' \in |2K|$, ceea ce contrazice ipoteza că $|2K| = \emptyset$.

Am demonstrat prin urmare că există un $a \in B$ astfel încît $|2K + F_a - F_b| \neq \emptyset$. Dacă $D \in |2K + F_a - F_b|$, atunci, la fel ca la începutul demonstraţiei, rezultă că D este de tip canonic. Q.E.D.

(7.13) COROLAR. *Fie X o suprafaţă minimală cu $(K^2) = 0$ şi $(K \cdot C) \geqslant 0$ pentru orice curbă C de pe X. Atunci sau $2K \sim 0$, sau există o fibrare eliptică sau cvasieliptică $f: X \to B$ pe X.*

Corolarul (7.13) pune în evidenţă rolul central pe care fibrările eliptice sau cvasieliptice îl joacă în clasificarea suprafeţelor algebrice. În continuare ne propunem să determinăm clasa canonică a

unei fibrări eliptice sau cvasieliptice $f : X \to B$. Din (7.3) știm că aproape toate fibrele lui f (exceptînd un număr finit dintre ele) sînt (geometric) integre. Există prin urmare un număr finit de puncte închise $b_1, \ldots, b_r \in B$ astfel încît pentru orice punct închis $b \in B - \{b_1, \ldots, b_r\}$, fibra $F_b = f^{-1}(b)$ să fie o curbă indecompozabilă de tip canonic, iar F_{b_i}, $(i = 1, \ldots, r)$, să fie o curbă de forma $f^{-1}(b_i) = m_i P_i$, cu P_i divizor indecompozabil de tip canonic și $m \geqslant 2$, $i = 1, \ldots, r$ $(r \geqslant 0)$. Acest fapt rezultă din conexiunea tuturor fibrelor lui f și observația făcută după definiția (7.6). Fibrele $F_{b_i} = m_i P_i$ cu $m_i \geqslant 2$ și P_i curbă indecompozabilă de tip canonic, $i = 1, \ldots, r$, se numesc fibrele multiple ale fibrării $f : X \to B$ eliptice sau cvasieliptice.

Din teoremele de schimbare a bazei (vezi Mumford [2], § 5) rezultă că $R^1 f_* O_X$ este un O_B-modul coerent astfel încît $(R^1 f_* O_X) \otimes k(b) \cong H^1(F_b, O_{F_b})$ pentru orice $b \in B$. Cum însă pentru orice $b \in B - \{b_1, \ldots, b_r\}$ dim $H^1(F_b, O_{F_b}) = 1$ (cf. (7.8) și (7.9)), acest fascicul este inversibil pe deschisul $B - \{b_1, \ldots, b_r\}$. Pe de altă parte, deoarece B este curbă nesingulară, atunci $R^1 f_* O_X = L \oplus T$, cu L local liber de rang finit și T partea sa de torsiune. Comparînd cu cele spuse mai înainte, rezultă că L este inversibil și suportul lui T este conținut în mulțimea $\{b_1, \ldots, b_r\}$ (deci T este un O_B-modul de lungime finită).

Dacă $b \in B$ este un punct închis, atunci, deoarece F_b este un divizor de tip canonic, teorema Riemann-Roch pe X arată că $\chi(O_X) = \chi(O_X(F_b))$. Din șirul exact

$$0 \to O_X \to O_X(F_b) \to O_X(F_b) \otimes O_{F_b} \cong O_{F_b} \to 0$$

și din aditivitatea caracteristicii Euler-Poincaré deducem că $\chi(O_{F_b}) = 0$, adică dim $H^1(O_{F_b}) =$ dim $H^0(O_{F_b})$. Folosind din nou teoremele de schimbare de bază citate mai sus, deducem :

$$b \in \operatorname{Supp}(T) \Leftrightarrow \dim H^1(O_{F_b}) \geqslant 2 \Leftrightarrow \dim H^0(O_{F_b}) \geqslant 2.$$

Această ultimă afirmație sugerează următoarea :

(7.14) Definiție. Fibrele fibrării f pentru care dim $H^0(O_{F_b}) \geqslant 2$ se numesc *fibrele excepționale* ale lui f.

Din cele spuse mai sus rezultă că orice fibră excepțională a lui f este fibră multiplă a lui f.

(7.15) Teoremă. *Fie $f: X \to B$ o fibrare eliptică sau cvasieliptică şi fie $R^1 f_* O_X = L \oplus T$ descompunerea de mai sus, cu L inversibil pe B şi T O_B-modul de lungime finită. Atunci*

$$\omega_X \cong f^*(L^{-1} \otimes \omega_B) \otimes O_X\left(\sum_{i=1}^{r} a_i P_i\right),$$

unde

a) $m_i P_i = F_{b_i}$, $(i = 1, \ldots, r)$ *sînt toate fibrele multiple ale lui f.*

b) $0 \leqslant a_i < m_i$.

c) $a_i = m_i - 1$ *dacă F_{b_i} nu este fibră excepţională.*

d) $\deg (L^{-1} \otimes \omega_B) = 2p_a(B) - 2 + \chi(O_X) + l(T)$, *unde $l(T)$ este lungimea lui T.*

Demonstraţie. Dacă F_b este o fibră nemultiplă avem $\omega_{F_b} \cong O_{F_b}$ (7.9). Cum fibratul conormal al lui F_b în X este trivial, rezultă că dacă F_b nu este fibră multiplă, avem $\omega_X \otimes O_{F_b} \cong O_{F_b}$.

Dacă $a_1, \ldots, a_m$ sînt m puncte generale ale lui B, avem prin urmare şirul exact:

$$0 \to \omega_X \to \omega_X \otimes O_X\left(\sum_{i=1}^{m} F_{a_i}\right) \to \bigoplus_{i=1}^{m} O_{F_{a_i}} \to 0,$$

de unde şirul exact de coomologie:

$$0 \to H^0(\omega_X) \to H^0\left(\omega_X \otimes O_X\left(\sum_{i=1}^{m} F_{a_i}\right)\right) \to \bigoplus_{i=1}^{m} H^0(O_{F_{a_i}}) \to H^1(\omega_X).$$

Din acest şir exact deducem inegalitatea:

$$\dim H^0\left(\omega_X \otimes O_X\left(\sum_{i=1}^{m} F_{a_i}\right)\right) \geqslant \dim H^0(\omega_X) + \sum_{i=1}^{m} \dim H^0(O_{F_{a_i}}) -$$

$$- \dim H^1(\omega_X) = \dim H^0(\omega_X) + m - \dim H^1(\omega_X).$$

Prin urmare, dacă $m > \dim H^1(\omega_X) - \dim H^0(\omega_X)$, sistemul linear complet $\left|K + \sum_{i=1}^{m} F_{a_i}\right|$ este nevid. Fie atunci $D \in \left|K + \sum_{i=1}^{m} F_{a_i}\right|$. Dacă $y \in B$ este un punct închis arbitrar, observăm $(D \cdot F_y) = 0$ (F_y

este o curbă de tip canonic). În această situație componentele lui D sînt în mod necesar conținute în fibrele lui f, deci și componentele lui K au aceeași proprietate. Fie

$$(7.15.1) \qquad K \sim \sum_{j=1}^{s} b_i F_{y_j} + D, \quad b_i \in \mathbb{Z}, \; s \geqslant 0,$$

și unde $D \geqslant 0$ este conținut într-o reuniune (finită) de fibre, dar neconținînd nici-o fibră a lui f. Fie $D_1 \ldots, D_t$ componentele conexe ale divizorului D, deci $\mathrm{Supp}(D_i) \cap \mathrm{Supp}(D_j) = \emptyset$ pentru $i \neq j$. Presupunem că D_i este conținut în fibra F_{z_i}, $(i = 1, \ldots, t)$. Din (2.6) obținem $(D_i^2) \leqslant 0$. Dacă pentru un i $(D_i^2) < 0$, atunci pentru cel puțin o componentă E a lui D_i vom avea $(D_i \cdot E) < 0$. Cum fibra F_{z_i} este în mod necesar reductibilă (deoarece $(D_i^2) < 0$ cf. (2.6)), avem de asemenea $(E^2) < 0$. Ținînd cont de (7.15.1) avem :

$$(K \cdot E) = \sum_{j=1}^{s} b_j (F_{y_j} \cdot E) + \sum_{k=1}^{t} (D_k \cdot E) = (D_i \cdot E) < 0.$$

Însă $(E^2) < 0$ și $(K \cdot E) < 0$ (E integră) implică E curbă excepțională de prima specie, ceea ce contrazice faptul că f este fibrare minimală.

Prin urmare am arătat că $(D_i^2) = 0$ pentru orice $i = 1, \ldots, t$. După (2.6) rezultă că D_i este multiplu rațional de fibra F_{z_i}. Aceasta nu probează altceva decît relația

$$(7.15.2) \qquad \omega_X \cong f^*(M) \otimes O_X\left(\sum_{i=1}^{r} a_i P_i\right), \quad 0 \leqslant a_i < m_i, \; a_i \in \mathbb{Z},$$

cu M un O_B-modul inversibil.

(7.15.3) *Afirmație.* $f_* O_X\left(\sum_{i=1}^{r} a_i P_i\right) \cong O_B$ dacă $0 \leqslant a_i < m$.

Ținînd cont de incluziunile $O_B = f_* O_X \subseteq f_* O_X\left(\sum_{i=1}^{r} a_i P_i\right) \subseteq$ $\subseteq f_* O_X\left(\sum_{i=1}^{r} (m_i - 1) P_i\right)$ (deduse din incluziunile $O_X \subseteq O_X\left(\sum_{i=1}^{r} a_i P_i\right) \subseteq$ $\subseteq O_X\left(\sum_{i=1}^{r} (m_i - 1\; P_i)\right)$, va fi suficient să demonstrăm că

$f_* O_X \left(\sum_{i=1} (m_i - 1) P_i \right) \cong O_B$. Problema fiind locală pe B, ultima relaţie revine la $f_* O_X ((m_i - 1) P_i) \cong O_B$, $(i = 1, \ldots, r)$. Însă $f_* O_X((m_i - 1)P_i) \cong O_B(b_i) \otimes f_* O_X(-P_i)$ (formula proiecţiei), deci pentru a obţine izomorfismul dorit va fi suficient să ştim că $f_* O_X(-P_i) \cong O_B(-b_i)$. Din incluziunile $O_B(-b_i) \subset f_* O_X(-P_i) \subseteq \subseteq O_B$ rezultă că este suficient să arătăm că omomorfismul injectiv $f_*(u): \ f_* O_X(-P_i) \to f_* \ O_X = O_B$ (indus de incluziunea $u: O_X(-P) \hookrightarrow O_X$) nu este izomorfism. Considerăm în acest sens diagrama comutativă:

$$\begin{array}{ccc}
(f_* O_X(-P_i))^{\otimes m_i} & \longrightarrow & f_* O_X(-m_i P_i) \cong O_B(-b_i) \\
{\scriptstyle (f_*(u))^{\otimes m_i}} \downarrow & & \downarrow {\scriptstyle f_*(u^{\otimes m_i})} \\
(f_* O_X)^{\otimes m_i} & \xrightarrow{\sim} & f_*(O_X^{\otimes m_i}) \cong O_B
\end{array}$$

Dacă $f_*(u)$ ar fi izomorfism, atunci prima săgeată verticală ar fi izomorfism; cum a doua săgeată verticală este totdeauna injectivă, ar rezulta atunci că ea este chiar un izomorfism, şi deci am deduce că un O_B-modul inversibil de grad -1 este izomorf cu O_B, fapt evident absurd. Afirmaţia (7.15.3) este dovedită.

Din (7.15.2), (7.15.3) şi formula proiecţiei obţinem:

(7.15.4) $$f_*(\omega_X) \cong M.$$

Pentru a determina pe M este nevoie să amintim teorema de dualitate Grothendieck pentru morfismul f. Ţinînd cont că X şi B sînt proiective şi nesingulare, iar fibrele lui f sînt curbe pe X (deci scheme Gorenstein), f este un morfism proiectiv şi Gorenstein; deci complexul dualizant al lui f se reduce la O_X-modulul inversibil (vezi Hartshorne [2]) $\omega_{X/B} = \omega_X \otimes f^*(\omega_B^{-1})$.

Dacă L' este un O_X-modul inversibil, atunci teorema de dualitate relativă la f afirmă că există un izomorfism canonic

$$f_*(L') \cong \mathscr{H}om_{O_B}(R^1 f_*(L'^{-1} \otimes \omega_{X/B}), O_B) \cong \text{(formula proiecţiei)}$$

$$\cong \mathscr{H}om_{O_B}(R^1 f_*(L'^{-1} \otimes \omega_X) \otimes \omega_B^{-1}, O_B) \cong$$

$$\cong \mathscr{H}om_{O_B}(R^1 f_*(L'^{-1} \otimes \omega_X), \omega_B).$$

Aplicînd această teoremă lui $L' = \omega_X$, obținem :

(7.15.5) $f_*(\omega_X) \cong \mathcal{H}om_{O_B}(R^1 f_* O_X, \omega_B) \cong \mathcal{H}om_{O_B}(L, \omega_B) \cong L^{-1} \otimes \omega_B$,

deoarece $R^1 f_* O_X = L \oplus T$ și dualul părții de torsiune este nul.
Formula (7.15.2) devine ținînd cont de (7.15.5) și (7.15.4) :

$$\omega_X \cong f^* (L^{-1} \otimes \omega_B) \otimes O_X \left(\sum_{i=1}^{r} a_i P_i \right), \quad 0 \leqslant a_i < m_i.$$

Considerăm acum șirul spectral Leray :

$$E_2^{pq} = H^p(B, R^q f_* O_X) \Rightarrow H^{p+q}(X, O_X).$$

Teorema (5.11) din cap. XV al cărții *Homological Algebra* de Cartan-Eilenberg, Princeton Univ. Press, 1956, implică existența șirului exact :

$$0 \to H^1(O_B) \to H^1(O_X) \to H^0(R^1 f_* O_X) \to H^2(O_B) = 0 \to$$

$$\to H^2(O_X) \to H^1(R^1 f_* O_X) \to 0,$$

de unde obținem :

$$\chi(O_X) = \dim H^0(O_X) - \dim H^1(O_X) + \dim H^2(O_X) = \dim H^0(O_B) -$$

$$- \dim H^1(O_B) - \dim H^0(L \oplus T) + \dim H^1(L \oplus T) = \chi(O_B) - \chi(L) -$$

$$- \dim H^0(T) = - \deg (L) - l(T),$$

de unde :

$$\deg (L) = - \chi(O_X) - l(T).$$

Ținînd cont că $\deg(\omega_B) = 2p_a(B) - 2$ am obținut deci condiția d) din enunțul teoremei.
Rămîne doar de demonstrat punctul c). Acesta rezultă din :
(7.15.6) LEMĂ. *În notațiile lui* (7.15), *fie* α_i *ordinul lui* $O_X(P_i) \otimes O_{P_i}$ *în* Pic (P_i). *Atunci* :

a) α_i *divide pe* m_i *și pe* $a_i + 1$.

b) $\dim H^0(P_i, O_{(\alpha_i+1)P_i}) \geqslant 2$ *și* $\dim H^0(P_i, O_{\alpha_i P_i}) = 1$.

c) $n \mapsto \dim H^0(P_i, O_{nP_i})$ *este o funcție crescătoare de* n.

În particular, dacă $a_i < m_i - 1$, atunci $\alpha_i < m_i$ şi deci fibra $m_i P_i$ este excepţională.

Demonstraţie. Pentru simplitate vom nota m, P, a, α în loc de m_i, P_i, a_i, α_i respectiv. Presupunem $m > n \geqslant 1$. Atunci surjecţia $O_{mP} \to O_{nP} \to 0$ induce surjecţia $H^1(P, O_{mP}) \to H^1(P, O_{nP}) \to 0$, deci funcţia $n \mapsto \dim H^1(P, O_{nP})$ este crescătoare. Însă teorema Riemann-Roch şi faptul că nP este divizor de tip canonic arată că $\chi(O_X(-nP)) = \chi(O_X)$, iar din şirul exact

$$0 \to O_X(-nP) \to O_X \to O_{nP} \to 0$$

deducem $\chi(O_{nP}) = 0$. Deci $\dim H^0(P, O_{nP}) = \dim H^1(P, O_{nP})$ şi punctul c) este dovedit.

Din definiţia lui α obţinem izomorfismul $O_X(\alpha P) \otimes O_P \cong O_P$. şi deci şirul exact:

$$0 \to O_P \to O_{(\alpha+1)P} \to O_{\alpha P} \to 0$$

care induce şirul exact de coomologie:

$$0 \to H^0(O_P) = k \to H^0(O_{(\alpha+1)P}) \xrightarrow{\text{restricţie}} H^0(O_{\alpha P}).$$

care arată că $\dim H^0(O_{(\alpha+1)P}) \geqslant 2$.

Pe de altă parte, dacă $1 \leqslant j < \alpha$, atunci $L_j = O_X(-jP) \otimes \otimes O_P$ este un O_P-modul inversibil cu proprietatea că gradul său pe fiecare componentă a lui P este nul. Cum L_j nu poate fi izomorf cu O_P, atunci (7.8) arată că $H^0(L_j) = 0$. Deci şirul exact

$$0 \to L_j \to O_{(j+1)P} \to O_{jP} \to 0$$

induce injecţia $0 \to H^0(O_{(j+1)P}) \to H^0(O_{jP})$. Izomorfismul $H^0(O_{\alpha P}) \cong \cong k$ se demonstrează prin inducţie după j, deoarece după (7.8) avem izomorfismul $H^0(O_P) \cong k$. Cu aceasta am dovedit şi punctul b) din (7.15.6).

În fine, avem izomorfismele:

$$(O_X(P) \otimes O_P)^m \cong O_P \text{ (evident)}$$

$$O_X((a+1)P) \otimes O_P \cong \omega_P.$$

unde al doilea izomorfism decurge din (7.15.2) şi formula de adjuncţie. Din definiţia ordinului rezultă atunci că α divide pe m şi pe

$a+1$. Lema (7.15.6) este demonstrată, şi cu aceasta teorema (7.15) este complet demonstrată.

(7.16) COROLAR. *În ipotezele teoremei* (7.15), $(K^2) = 0$, *unde* K *este clasa canonică a lui* X.

(7.17) COROLAR. *În ipotezele şi notaţiile lui* (7.15) *şi* (7.15.6), *dacă* $\dim H^1(O_X) \leqslant 1$, *atunci* $a_i + 1 = m_i$ *sau* $\alpha_i + a_i + 1 = m_i$.

Demonstraţie. În demonstraţia lemei (7.15.6) am văzut că $\chi(O_{(\alpha+1)P}) = 0$ $(\alpha = \alpha_i,\ m = m_i, \ldots)$, iar din enunţul aceleiaşi leme — că $\dim H^0(P, O_{(\alpha+1)P}) \geqslant 2$; deci folosind teorema de dualitate pe curba $(\alpha+1)P$, obţinem:

$$\dim H^0(P,\ \omega_{(\alpha+1)P}) = \dim H^1(P,\ \omega_{(\alpha+1)P}) = \dim H^0(P, O_{(\alpha+1)P}) \geqslant 2.$$

Şirul exact

$$0 \to \omega_X \to O_X((\alpha+1)P) \otimes \omega_X \to \omega_{(\alpha+1)P} \to 0$$

induce şirul exact de coomologie

$$0 \to H^0(\omega_X) \to H^0(O_X((\alpha+1)P) \otimes \omega_X) \to H^0(\omega_{(\alpha+1)P}) \to H^1(\omega_X)$$

de unde:

$$\dim H^0(O_X((\alpha+1)P) \otimes \omega_X) + \dim H^1(\omega_X) \geqslant \dim H^0(\omega_X) + $$
$$+ \dim H^0(\omega_{(\alpha+1)P}) \geqslant 2 + \dim H^0(\omega_X).$$

Deoarece $\dim H^1(\omega_X) = \dim H^1(O_X) \leqslant 1$ prin ipoteză, obţinem:

$$\dim H^0(O_X((\alpha+1)P) \otimes \omega_X) > \dim H^0(\omega_X).$$

Însă $\omega_X \cong f^*(M) \otimes O_X(aP) \otimes \ldots$, cu $M = f_*(\omega_X)$ şi ţinînd cont de (7.15.3) obţinem:

$$f_*(O_X((\alpha+1)P) \otimes \omega_X) \cong \begin{cases} M \text{ dacă } \alpha + a + 1 < m, \\ M \otimes O_B(\beta b), \text{ dacă } \alpha + a + 1 \geqslant m, \end{cases}$$

unde $\beta > 0$ este cîtul împărţirii lui $\alpha + a + 1$ la m (nu neapărat cu restul zero). Inegalitatea de mai sus se mai poate transcrie în cazul cînd $\alpha + a + 1 < m$:

$$\dim H^0(f_*(O_X((\alpha+1)P) \otimes \omega_X)) = \dim H^0(M) > \dim H^0(M),$$

ceea ce este absurd. Deci întotdeauna avem $\alpha + a + 1 \geq m$, sau încă $1 + (a+1)/\alpha \geq m/\alpha$. Cum $(a+1)/\alpha \leq m/\alpha$, rezultă $(a+1)/\alpha = m/\alpha$, sau $1 + (a+1)/\alpha = m/\alpha$. Q.E.D.

(7.18) TEOREMĂ. *Fie $f: X \to B$ o fibrare cvasieliptică. Atunci caracteristica corpului de bază k este 2 sau 3. În plus, fibra generală a lui f este o curbă rațională proiectivă avînd o singură singularitate, care este punct cuspidal ordinar.*

Demonstrație. Dacă $b \in B$ este un punct închis astfel încît fibra F_b este integră, atunci $p_a(F_b) = 1$ și F_b curbă cu singularități implică (vezi Serre [3], chap. IV) că F_b este o curbă rațională cu o singură singularitate care este:

— punct cuspidal ordinar, sau

— punct dublu cu tangente distincte (punct dublu ordinar).

Vom demonstra că a doua posibilitate nu se realizează pentru nici-o fibră F_b a fibrării cvasieliptice $f: X \to B$. Notăm prin Σ mulțimea punctelor $x \in X$ în care f nu este neted. Scoțînd punctele $b_i \in B$ pentru care fibrele F_{b_i} nu sînt integre, punem $\Sigma_0 = \Sigma \cap f^{-1}(B - \{b_1, \ldots, b_n\})$. Dacă t este un parametru local pe B în punctul $b = f(x)$, cu $x \in \Sigma_0$, și u, v, sînt parametri locali (regulați, ca și t) pe X în punctul x, atunci f este dată de o serie formală $f(u, v) \in k[[u, v]]$ (corespunzătoare omomorfismului local completat $k[[t]] = \hat{O}_{B,b} \to k[[u, v]] = \hat{O}_{X,x}$). Deoarece fibra F_b este integră, seria $f(u, v)$ are forma:

— $f(u, v) = U(u, v) \cdot (u^2 + v^3)$ cu $U(0, 0) \neq 0$, cînd x este punct cuspidal ordinar pentru F_b, sau

— $f(u, v) = U(u, v) \cdot u \cdot v$, cu $U(0, 0) \neq 0$, cînd x este punct dublu ordinar pentru F_b.

Deoarece Σ_0 este dată în jurul lui x de ecuațiile $\partial f/\partial u = \partial f/\partial v = 0$, avem în cazul al doilea

$$\partial f/\partial u = (\text{unitate}).v, \quad \partial f/\partial v = (\text{unitate}) \cdot u,$$

și deci x este un punct izolat al lui Σ_0. Însă de aici rezultă (ținînd cont de definiția lui Σ_0 și de faptul că f este morfism propriu) că există un deschis $V \subseteq B - \{b_1, \ldots, b_n\}$ ce conține pe b astfel încît restricția lui f la $f^{-1}(V)$ să fie un morfism neted în $f^{-1}(V) - \{x\}$, fapt imposibil într-o fibrare cvasieliptică.

Am dovedit deci că pentru orice $b \in B - \{b_1, \ldots, b_n\}$, fibra F_b este o curbă integră cu o singură singularitate, care este punct cuspidal ordinar. Atunci Σ_0 este locul geometric al tuturor acestor puncte cuspidale din $f^{-1}(B - \{b_1, \ldots, b_n\})$. Atunci $f(u, v)$ are forma:

$$f(u, v) = U(u, v) \cdot (u^2 + v^3), \quad U(0, 0) \neq 0.$$

Presupunînd acum $\text{car}(k) \neq 2$, avem $\partial f/\partial u = 2u \cdot U(u, v) + V(u, v)$, $\text{ord}(V) \geq 2$, şi deci ecuaţia $\partial f/\partial u = 0$ defineşte în jurul lui x o curbă nesingulară ce conţine pe Σ_0. Rezultă atunci că $\partial f/\partial u = 0$ este chiar o ecuaţie locală pentru curba Σ_0 în jurul lui x şi că Σ_0 este nesingulară în fiecare punct al său. În plus, restricţia lui f la Σ_0 este o bijecţie pe $B - \{b_1, \ldots, b_n\}$. Multiplicitatea de intersecţie $(\Sigma_0 \cdot F_b)$, $b \in B - \{b_1, \ldots, b_n\}$, se calculează imediat:

$$(\Sigma_0 \cdot F_b)_x = \dim (O_{\Sigma_0,x}/m_{B,b}\, O_{\Sigma_0,x}) = \dim k[[u,v]]/(f, \partial f/\partial u) =$$

$$= \dim k[[u, v]]/(u^2 + v^3, u) = \dim k[[v]]/(v^3) = 3.$$

De aici rezultă $\text{car}(k) = 3$, deoarece extinderea $k(B) \hookrightarrow k(\Sigma_0)$ fiind finită şi pur neseparabilă, are gradul p^m, $m \geq 1$, $p = \text{car}(k)$. În plus, $p^m = (\Sigma_0 \cdot F_b)$, $b \in B - \{b_1, \ldots, b_n\}$, deci $p^m = 3$, adică $p = 3$. Q.E.D.

(7.19) *Remareă.* Pe de altă parte, în caracteristică 2 sau 3 apar efectiv exemple de fibrări cvasieliptice (vezi Bombieri-Mumford [2]).

(7.20) *Referinţe bibliografice.* Teorema (7.1), lema (7.2) şi corolarul (7.3) sînt prezentate după Şafarevici [2], iar propoziţia (7.4) după Hartshorne [1]. Noţiunea de curbă de tip canonic a fost introdusă de Mumford [4], după care am prezentat teorema (7.8), corolarele (7.9) şi (7.10) şi teoremele (7.11) şi (7.12). Noţiunea de fibră excepţională a unei fibrări eliptice sau cvasieliptice apare pentru prima dată în Bombieri-Mumford [1], după care am prezentat teorema (7.15) şi corolarul (7.17). Teorema (7.18) provine din Mumford [4] şi Bombieri-Mumford [2].

§ 8.

DIMENSIUNEA CANONICĂ A UNEI FIBRĂRI ELIPTICE SAU CVASIELIPTICE

Fie $f: X \to B$ o fibrare eliptică sau cvasieliptică. Teorema (7.15) exprimă fasciculul dualizant ω_X al lui X sub forma

$$\omega_X = f^*(L^{-1} \otimes \omega_B) \otimes O_X\left(\sum_{i=1}^{r} a_i P_i\right), \quad 0 \leqslant a_i < m_i.$$

Dacă $n \geqslant 1$ este un multiplu comun al numerelor $m_1, \ldots, m_r$, obținem:

$$\omega_X^n = f^*(L^{-n} \otimes \omega_B^n) \otimes O_X\left(\sum_{i=1}^{r} a_i\, nP_i\right) =$$

$$= f^*\left(L^{-n} \otimes \omega_B^n \otimes O_B\left(\sum_{i=1}^{r} a_i/m_i \cdot nb_i\right)\right).$$

Din aceeași teoremă mai rezultă:

(8.1) Propoziție. *Dacă $n \geqslant 1$ este un multiplu comun al lui $m_1, \ldots, m_r$, atunci $H^0(X, \omega_X^n) = H^0\left(B, L^{-n} \otimes \omega_B^n \otimes O_B\left(\sum_{i=1}^{r} a_i/m_i \cdot nb_i\right)\right)$, cu* $\deg\left(L^{-n} \otimes \omega_B^n \otimes O_B\left(\sum_{i=1}^{r} a_i/m_i \cdot nb_i\right)\right) = n(2p_a(B) - 2) + n\chi(O_X) + nl(T) + \sum_{i=1}^{r} na_i/m_i$.

(8.2) Fie acum X o suprafață minimală arbitrară. Atunci X aparține uneia și numai uneia din următoarele patru clase de suprafețe minimale (caracterizate de proprietățile):

a) Există o curbă integră C pe X astfel încît $(K \cdot C) < 0$.

b) Pentru orice curbă integră C pe X avem $(K \cdot C) = 0$ şi deci $(K^2) = 0$. Altfel spus, $K \approxeq 0$.

c) $(K^2) = 0$ şi pentru orice curbă integră C pe X avem $(K \cdot C) \geqslant 0$ şi în plus există o curbă integră C' cu proprietatea $(K \cdot C') > 0$.

d) $(K^2) > 0$ şi $(K \cdot C) \geqslant 0$ pentru orice curbă integră C pe X.

Într-adevăr, teoretic vorbind ar mai fi de considerat şi cazul cînd $(K^2) < 0$ şi $(K \cdot C) \geqslant 0$ pentru orice curbă integră C pe X. Însă după (1.25) această situaţie este imposibilă. Mai observăm că a fost esenţial faptul că ne-am mărginit la a considera doar modele minimale pentru a delimita cele patru clase; într-adevăr, dacă X nu ar fi model minimal, fie C o curbă excepţională de prima specie pe X. Atunci avem $(K \cdot C) = -1 < 0$.

(8.3) *Observaţii*. Fie X o suprafaţă minimală.

a) Dacă X aparţine clasei a), atunci $c(X) = -1$, adică $p_n = 0$ pentru orice $n \geqslant 1$.

b) Dacă X aparţine clasei b), atunci $c(X) \leqslant 0$.

c) Dacă în plus X admite o structură eliptică sau cvasieliptică $f : X \to B$ şi dacă în notaţiile lui (8.1) notăm prin $\lambda(f) = 2p_a(B) - 2 + \chi(O_X) + \sum_{i=1}^{r} a_i/m_i + l(T)$, atunci X nu poate aparţine clasei d) şi în plus avem:

i) X aparţine clasei a) dacă şi numai dacă $\lambda(f) < 0$, şi atunci $c(X) = -1$.

ii) X aparţine clasei b) dacă şi numai dacă $\lambda(f) = 0$, şi atunci $c(X) \leqslant 0$.

iii) X aparţine clasei c) dacă şi numai dacă $\lambda(f) > 0$, sau dacă şi numai dacă $c(X) = 1$.

Demonstraţie. c) rezultă imediat din (8.1), (5.9) şi (5.10).

a) Fie C o curbă integră cu proprietatea $(K \cdot C) < 0$. Atunci pentru orice divizor $D \in \mathrm{Div}\,(X)$ există un $n_D \in \mathbb{Z}$ astfel încît $|D + nK| = \emptyset$ pentru orice $n \geqslant n_D$. Într-adevăr, deoarece $(K \cdot C) < 0$, există un $n_D \in \mathbb{Z}$ astfel încît $n(K \cdot C) < -(D \cdot C)$ pentru orice $n \geqslant n_D$. Fie $\Delta \in |D + nK|$, cu $n \geqslant n_D$; atunci $(\Delta \cdot C) = (D \cdot C) + n(K \cdot C) < 0$. Cum $\Delta \geqslant 0$, rezultă atunci $(C^2) < 0$. Însă $(C^2) < 0$ şi $(K \cdot C) < 0$ implică imediat (cu ajutorul formulei genului) că C este curbă excepţională de prima specie, ceea ce nu este posibil. Deci $|D + nK| = \emptyset$ pentru orice $n \geqslant n_D$.

Luînd în particular $D = K$, rezultă că există un $n_0 = n_K$ astfel încît $|nK| = \emptyset$ pentru orice $n \geqslant n_0$. Cum $R(X)$ este un domeniu de integritate (şi deci $p_{mn} = 0$ implică $p_m = 0$, cu m şi n numere naturale), deducem deci că $p_n = 0$ pentru orice $n \geqslant 1$.

b) Dacă X aparţine clasei b) avem de demonstrat (cf. (5.10)) că $p_n \leqslant 1$ pentru orice $n \geqslant 1$. Dacă prin absurd ar exista un $n \geqslant 1$ cu $p_n \geqslant 2$, atunci $\dim |nK| \geqslant 1$, deci ar exista un divizor $0 < \Delta \in \in |nK|$. Însă dacă H este o secţiune hiperplană avem $(\Delta \cdot H) > 0$, deci o componentă C a lui H ar avea încă proprietatea $(\Delta \cdot C) > 0$, adică $n(K \cdot C) > 0$, deci $(K \cdot C) > 0$, absurd. Q.E.D.

(8.4) Fie acum X o suprafaţă minimală arbitrară cu proprietăţile $(K^2) = 0$ şi $p_g \leqslant 1$ (după (8.3) b) orice suprafaţă minimală aparţinînd clasei b) are această proprietate). Formula lui Noether devine în acest caz

$$10 - 8q + 12p_g = b_2 + 2\Delta.$$

Cum $p_g \leqslant 1$, $0 \leqslant \Delta \leqslant 2p_g$ şi $\Delta = 2(q - s)$ este număr par (cf. (5.1)). rezultă că Δ poate lua numai una din valorile 0 sau 2. Folosind aceste observaţii este imediat de văzut că relaţia de mai sus poate fi satisfăcută numai în următoarele situaţii :

1. $b_2 = 22,\ b_1 = 0,\ \chi(O_X) = 2,\ q = 0,\ p_g = 1$ şi $\Delta = 0$.

2. $b_2 = 14,\ b_1 = 2,\ \chi(O_X) = 1,\ q = 1,\ p_g = 1$, şi $\Delta = 0$.

3. $b_2 = 10,\ b_1 = 0,\ \chi(O_X) = 1,$ $\left\langle \begin{array}{l} q = 0,\ p_g = 0 \text{ şi } \Delta = 0, \quad \text{sau} \\ q = 1,\ p_g = 1, \text{ şi } \Delta = 2. \end{array} \right.$

4. $b_2 = 6,\ b_1 = 4,\ \chi(O_X) = 0,\ q = 2,\ p_g = 1$ şi $\Delta = 0$.

5. $b_2 = 2,\ b_1 = 2,\ \chi(O_X) = 0$ $\left\langle \begin{array}{l} q = 1,\ p_g = 0 \text{ şi } \Delta = 0, \quad \text{sau} \\ q = 2,\ p_g = 1, \text{ şi } \Delta = 2. \end{array} \right.$

(8.5) *Remarcă.* Dacă X aparţine clasei b) şi $p_g = 1$, atunci $K \sim 0$ (adică $\omega_X \cong O_X$), deoarece $\omega_X \approxeq 0$ şi $H^0(\omega_X) \neq 0$ implică $\omega_X \cong O_X$.

(8.6) TEOREMĂ. *Dacă X este o suprafaţă minimală aparţinînd clasei b) şi avînd $b_2 = 2$, atunci $b_1 = 2$ şi deci* Alb(X) *este o curbă eliptică, iar fibrele morfismului Albanese $f: X \to B =$* Alb(X) *sînt sau toate curbe eliptice nesingulare, sau toate curbe raţionale cu cîte o singură singularitate care este punct cuspidal ordinar. Ultima situaţie poate apare numai în caracteristica 2 sau 3.*

Demonstrație. Din tabelul de mai sus rezultă că $b_2 = 2$ implică $b_1 = 2$, deci $s = 1$. Din teorema (5.3) rezultă că $\dim \mathrm{Alb}(X) = s = 1$, și deci $B = \mathrm{Alb}(X)$ este o curbă eliptică. Fie $b \in B$ un punct închis și $F = F_b = f^{-1}(b)$. Formula genului implică $p_a(F) = 1$, deoarece $(F^2) = (K \cdot F) = 0$. Prin urmare $f : X \to B$ este o fibrare eliptică sau cvasieliptică. Ultima afirmație decurge din teorema (7.18). Ca să arătăm că toate fibrele lui f sînt ireductibile folosim următoarea :

(8.7) Lemă. *Fie $f : X \to B$ o fibrare cu proprietatea $f_* O_X \cong O_B$. Atunci $\rho = \mathrm{rang}\ NS(X) \geqslant 2$, iar dacă $\rho = 2$, atunci toate fibrele lui f sînt ireductibile.*

Acceptînd pentru moment această lemă, observăm că inegalitatea Igusa-Severi $\rho \leqslant b_2 = 2$, implică conform lemei (8.7), $\rho = 2$ (datorită existenței fibrării $f : X \to B = \mathrm{Alb}(X)$), și că toate fibrele lui f sînt ireductibile.

Tot din tabelul de la (8.4) citim că $\chi(O_X) = 0$, și deoarece $p_a(B) = 1$, avem, în notațiile propoziției (8.1) :

$$\deg (L^{-1} \otimes \omega_B) = 2p_a(B) - 2 + \chi(O_X) + l(T) = l(T) \geqslant 0.$$

Cum $\omega_X = f^* (L^{-1} \otimes \omega_B) \otimes O_X \left(\sum_{i=1}^{r} a_i\ P_i \right)$, deducem că pentru orice punct închis $y \in B$ avem (ținînd cont că $\omega_X \approx 0$) :

$$l(T) \cdot f^{-1}(y) + \sum_{i=1}^{r} a_i\ P_i \approx 0.$$

Cum acest divizor este $\geqslant 0$, el poate fi numeric echivalent cu zero numai cînd este egal cu zero, deci $l(T) = 0$ și $a_i = 0$ pentru orice i. Însă $l(T) = 0$ implică $a_i = m_i - 1$ (cf. (7.15)), deci $m_i = 1$ pentru orice i. Altfel spus, fibrarea Albanese $f : X \to B$ nu are fibre multiple.

Am dovedit pînă acum că toate fibrele lui f sînt curbe integre. Dacă fibra generală a lui f (sau echivalent, una din fibrele închise ale lui f) este nesingulară, fie $\omega \in \Gamma(\omega_B)$ o formă diferențială nenulă și regulată pe B. Atunci $f^*(\omega)$ se anulează exact în punctele în care morfismul f nu este neted. Rezultă că mulțimea punctelor în care $f^*(w)$ se anulează este o mulțime finită sau vidă. În particular, $\mathrm{div}_X\ (f^*(\omega))$ este nul. Cum $\omega_X \approx 0$, avem din formula lui Igusa (vezi Igusa [1]) :

$c_2 = \deg \langle f^*(\omega) \rangle + (\mathrm{div}_X f^*(\omega)) \cdot \omega_X) - (\omega_X \cdot \omega_X) = \deg \langle f^*(\omega) \rangle$, unde prin $\langle f^*(\omega) \rangle$ am notat 0-ciclul asociat 1-formei $f^*(\omega)$,

adică suma formală a tuturor punctelor în care $f^*(\omega)$ se anulează, luate cu multiplicitățile respective (*loc. cit.*). Cum $b_2 = b_1 = 2$, rezultă $c_2 = 2 - 2b_1 + b_2 = 0$, deci $f^*(\omega)$ nu se anulează în nici-un punct al lui X, adică f este morfism neted. Teorema (8.6) este demonstrată modulo lema (8.7).

Demonstrația lemei (8.7). Fie F' o fibră închisă arbitrară a lui f și H o secțiune hiperplană arbitrară pe X. Deoarece $(F'^2) = 0$ și $(H^2) > 0$, clasele lui F' și H în $NS(X) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ sînt linear independente, deci $\rho \geqslant 2$.

Presupunînd că ar exista o fibră reductibilă de forma $F = a_1E_1 + \ldots + a_n E_n$, $a_i \geqslant 1$ întregi și pentru $i \neq j$ E_i este diferită de E_j, iar $E_1, \ldots, E_n$ sînt componentele ireductibile ale lui F, atunci din (2.6) avem că $(E_1^2) < 0$. Deci clasele lui E_1 și F' în $NS(X) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ sînt liniar independente. Cum $\rho = 2$, există $a, b \in \mathbb{Q}$ astfel încît $H \approx aE_1 + bF'$. Însă $(H^2) = a^2(E_1^2) + 2ab\,(E_1 \cdot F') + b^2(F'^2) = a^2(E_1^2) \leqslant 0$, deoarece avem în mod evident $(E_1 \cdot F') = (F'^2) = 0$. Am obținut deci o absurditate, ceea ce demonstrează lema (8.7).

(8.8) Definiție. O suprafață minimală aparținînd clasei b) și avînd $b_2 = 2$ se numește *hipereliptică* dacă fibrele morfismului Albanese sînt toate curbe eliptice nesingulare.

(8.9) Definiție. O suprafață minimală X aparținînd clasei b) și avînd $b_2 = 2$ se numește *cvasihipereliptică* dacă fibrele morfismului Albanese sînt toate curbe raționale cu cîte un singur punct singular, care este punct cuspidal ordinar.

(8.10) Teoremă. *Fie* $f : X \to B = \mathrm{Alb}(X)$ *o fibrare hipereliptică sau cvasihipereliptică. Atunci există o altă fibrare eliptică* $g : X \to P^1$, *a lui* X *peste dreapta proiectivă* P^1.

Demonstrație. Arătăm mai întîi că este suficient să construim o curbă C indecompozabilă de tip canonic astfel încît $(C \cdot F_t) > 0$ pentru orice $t \in B$, cu $F_t = f^{-1}(t)$.

Într-adevăr, presupunînd că am construit pe C cu proprietatea de mai sus și aplicînd teorema (7.11), găsim o fibrare eliptică sau cvasieliptică $g : X \to B'$ pentru care $(F_t \cdot F_{t'}) > 0$ pentru orice $t \in B$ și orice $t' \in B'$, cu $F_{t'} = g^{-1}(t')$. Dacă g ar fi o fibrare cvasieliptică, atunci fibra generală $F_{t'}$ ar fi o curbă rațională și deci $f(F_{t'})$ ar fi un punct pe B deoarece B este curbă eliptică. Deci $F_{t'} \subseteq F_t$ pentru un $t \in B$, fapt ce contrazice inegalitatea $(F_t \cdot F_{t'}) > 0$. Deci g este în mod necesar o fibrare eliptică. Deoarece $\omega_X \approx 0$, după (8.3) c), avem $\lambda(g) = 2p_a(B') - 2 + \chi(O_X) + l(T') + \sum_{i=1}^{r} a_i/m_i = 0$, de unde $p_a(B') \leqslant 1$. Dacă $p_a(B') = 1$, din proprietatea de universalitate a

varietății Albanese rezultă că există un morfism $h : B \to B'$ astfel încît $h \circ f = g$, fapt ce din nou contrazice inegalitatea $(F_t \cdot F_{t'}) > 0$. Deci $p_a(B') = 0$, adică $B' = P^1$.

Rămîne de construit o curbă C de tip canonic astfel încît $(C \cdot F_t) > 0$.

Fie acum H o secțiune hiperplană pe X și D un divizor de forma $D = aH + bF_0$, cu a și b întregi și F_0 fibra lui f deasupra unui punct $t_0 \in B$ fixat (t_0 punct închis). Putem determina pe a și b astfel încît

(*) $$(D^2) = 0 \text{ și } (D \cdot F_t) > 0.$$

(De exemplu luînd $b = -(H^2)$ și $a = 2(H \cdot F_0)$.)

Fixînd un astfel de divizor D cu proprietățile (*), punem pentru orice punct închis $t \in B$, $D_t = D + F_t - F_0$. Afirmăm că *există un $t \in B$ punct închis astfel încît* $|D_t| \neq \emptyset$.

Ca să dovedim această afirmație observăm mai întîi că pentru orice $t \in B$ avem $H^2(O_X(D_t)) = 0$. Într-adevăr, după dualitatea Serre avem de probat că $|K - D_t| = \emptyset$ pentru orice t. Dacă pentru un t ar exista un $\Delta \in |K - D_t|$, atunci cum $K - D_t \approx - D_t \approx - D$, am obține $(\Delta \cdot F_0) = -(D \cdot F_0) < 0$, ceea ce este absurd deoarece $\Delta > 0$ și F_0 este o curbă cu $(F_0^2) = 0$.

Acum, dacă afirmația noastră ar fi falsă ar însemna că $H^0(O_X(D_t)) = 0$ pentru orice $t \in B$. Însă din teorema Riemann-Roch deducem imediat că $\chi(O_X(D_t)) = 0$ pentru orice t, de unde, ținînd cont de cele spuse mai sus, rezultă $H^0(O_X(D_t)) = H^1(O_X(D_t)) = 0$ pentru orice $t \in B$. Însă șirul exact

$$0 \to O_X(D_t) \to O_X(D + F_t) \to O_X(D) \otimes O_{F_t} \to 0$$

induce șirul exact de coomologie

$$0 = H^0(O_X(D_t)) \to H^0(O_X(D + F_t)) \xrightarrow{\varepsilon_t} H^0(O_X(D) \otimes O_{F_t}) \to$$
$$\to H^1(O_X(D_t)) = 0$$

unde ε_t este omomorfismul canonic de restricție.

Cum $(D \cdot F_0) > 0$, există o secțiune netrivială $s \in H^0(F_0, O_X(D) \otimes O_{F_0})$, și fie atunci $s_t = \varepsilon_t^{-1}(s)$. În mod evident (ca și în demonstrația lui (7.12)) avem:

$$X = \text{închiderea} \bigcup_{t \neq t_0} \text{div}(s_t),$$

$\text{div}(s_t) \cap F_0$ are suportul în $\text{div}_{F_0}(s)$ pentru orice $t \neq t_0$.

Rezultă că dacă $t \to t_0$ avem în mod necesar $\operatorname{div}(s_{t_0}) = F_0 + \Delta \sim F_0 + D$, cu $\Delta \geqslant 0$. Deci $\Delta \in |D|$, ceea ce este absurd şi afirmaţia este dovedită.

Am demonstrat deci că există un $t \in B$, şi un $C \in |D_t|$. Avem $(C^2) = ((D + F_t - F_0)^2) = (D^2) = 0$ şi $(C \cdot F_0) = (D + F_t - F_0 . F_0) = (D \cdot F_0) > 0$ (în particular, $C > 0$). Afirmăm că C este de tip canonic. Într-adevăr, fie $C = \sum_{i=1}^{n} n_i E_i$, cu $E_1, \ldots, E_n$ componentele lui C (distincte două cîte două) şi $n_i \geqslant 1$. Avem

$$(**) \qquad (C \cdot E_j) = \sum_{i \neq j} n_i (E_i \cdot E_j) + n_j (E_j^2).$$

Dacă $E = E_j$ este o curbă cu $(E^2) < 0$, atunci deoarece $(K \cdot E) = 0$, formula genului implică $p_a(E) = 0$ şi $(E^2) = -2$. Vom arăta că în ipotezele teoremei (8.10) asemenea curbe nu pot exista pe X. Într-adevăr, E ar fi conţinută într-o fibră a lui f, iar după teorema (8.6) acest lucru este imposibil.

Rezultă deci că în (**) avem $(E_j^2) \geqslant 0$ pentru orice j, şi cum $(E_i \cdot E_j) \geqslant 0$ dacă $i \neq j$, avem $(C \cdot E_j) \geqslant 0$ pentru orice j. Cum

$$0 = (C^2) = \sum_{j=1}^{n} n_j (C \cdot E_j),$$

rezultă că $(C \cdot E_j) = 0$ pentru orice j. Cum pe de altă parte $\omega_X \approx 0$, avem şi $(K \cdot E_j) = 0$ şi deci C este de tip canonic. Q.E.D.

(8.11) Teoremă. *Fie X o suprafaţă minimală ce aparţine clasei* b) *sau clasei* c). *Atunci $p_4 \neq 0$ sau $p_6 \neq 0$. Mai precis, dacă X aparţine clasei* b), *atunci $4K \sim 0$ sau $6K \sim 0$, iar dacă X aparţine clasei* c), *atunci $|4K|$ sau $|6K|$ este reprezentat de cîte un divizor strict pozitiv.*

Demonstraţie. Din corolarul (7.13) rezultă că dacă X aparţine clasei b) sau clasei c), atunci $2K \sim 0$ sau există o fibrare eliptică sau cvasieliptică $f: X \to B$ pe X. Cum $2K \sim 0$ implică X aparţine clasei b) şi $p_2 \neq 0$ (deci $p_4 \neq 0$ şi $p_6 \neq 0$), putem presupune că există fibrarea $f: X \to B$ eliptică sau cvasieliptică pe X. Dacă $p_g > 0$, atunci din nou $p_4 \neq 0$ şi $p_6 \neq 0$ şi nu am avea nimic de demonstrat. Deci putem presupune în plus că $p_g = 0$. Deoarece $(K^2) = 0$ putem folosi tabelul de la (8.4). Din teorema (7.15) rezultă că

$$p_g = \dim H^0(B, L^{-1} \otimes \omega_B) = 0,$$



cu deg $(L^{-1} \otimes \omega_B) = 2p_a(B) - 2 + \chi(O_X) + l(T)$. Însă din tabelul de la (8.4) citim că $\chi(O_X) \geqslant 0$, deci teorema lui Riemann-Roch pe curba B implică $p_a(B) = 1$, $\chi(O_X) = 0$ şi $l(T) = 0$, sau $p_a(B) = 0$ şi $\chi(O_X) + l(T) < 2$.

Presupunînd mai întîi că $p(B) = 1$, $\chi(O_X) = 0$ şi $l(T) = 0$, din teorema (7.15) rezultă că f nu are fibre excepţionale şi $a_i = m_i - 1$. Dacă f posedă o fibră multiplă m_1P_1, atunci formula

$$\omega_X = f^* (L^{-1} \otimes \omega_B) \otimes O_X \left(\sum_{i=1}^{r} (m_i - 1) P_i \right)$$

ne dă

$$\omega_X^2 = f^*(L^{-2} \otimes \omega_B^2) \otimes f^* O_B (b_1 + \ldots) \otimes O_X \left(\sum_{i=1}^{r} (m_i - 2) P_i \right).$$

Însă deoarece deg $(L^{-2} \otimes \omega_B^2 \otimes O_B (b_1 + \ldots)) \geqslant 1$ şi B este curbă eliptică, rezultă, folosind formula proiecţiei:

$$p_2 = \dim H^0(\omega_X^2) = \dim H^0(B, L^{-2} \otimes \omega_B^2 \otimes O_B(b_1 + \ldots)) \geqslant 1$$

şi atunci $p_4 \neq 0$ şi $p_6 \neq 0$ şi teorema este din nou dovedită în acest caz. Dacă $p_a(B) = 1$, $\chi(O_X) = 0$ şi $l(T) = 0$ rezultă deci că putem presupune în plus că f nu are fibre multiple. Atunci după (7.15) avem

$$\omega_X = f^*(L^{-1} \otimes \omega_B)$$

şi deg $(L^{-1} \otimes \omega_B) = 2p_a(B) - 2 + \chi(O_X) + l(T) = 0$. Deci $\omega_X \approxeq 0$ şi prin urmare X aparţine clasei b). Însă citind în tabelul din (8.4) vedem că $p_g = 0$ şi $\chi(O_X) = 0$ putem avea doar în cazul 5, deci cînd $b_2 = 2$. Altfel spus, X este suprafaţă hipereliptică sau cvasihipereliptică. Însă după teorema (8.10) există în această situaţie o altă fibrare $g : X \to P^1$ eliptică pe X de bază dreapta proiectivă.

Prin urmare, pentru a termina demonstraţia teoremei (8.11) rămîne să analizăm situaţia cînd X posedă o fibrare eliptică sau cvasieliptică $f: X \to B$ cu $p_a(B) = 0$ (adică $B = P^1$), şi $p_g = 0$, adică deg $(L^{-1} \otimes \omega_B) = -2 + \chi(O_X) + l(T) < 0$. În plus, cum X aparţine clasei b) sau clasei c) rezultă din (8.3) c) că

$$\lambda(f) = -2 + \chi(O_X) + l(T) + \sum_{i=1}^{r} a_i/m_i \geqslant 0.$$

Notînd prin $\lambda' = -2 + \chi(O_X) + l(T)$, avem deci $\lambda' < 0$ şi $\lambda' + \sum_{i=1}^{r} a_i/m_i \geqslant 0$. Deoarece $B = P^1$, avem pentru orice $n \geqslant 1$:

$$(*) \qquad \dim |nK| = n\lambda' + \sum_{i=1}^{r} [na_i/m_i].$$

unde prin $[u]$ am notat partea întreagă a numărului real u.

Deosebim următoarele cazuri:

A) $l(T) = 0$, deci după (7.15) $a_i = m_i - 1$, $\alpha_i = m_i$ (folosind şi notaţiile lemei (7.15.6)).

Dacă $\chi(O_X) = 0$, avem în mod necesar cel puţin trei fibre multiple $\left(\lambda' = -2 \text{ şi } -2 + \sum_{i=1}^{r} (m_i - 1)/m_i \geqslant 0\right)$. Avem următoarele posibilităţi:

a) Există cel puţin patru fibre multiple, deci $m_i \geqslant 2$ pentru $i = 1, 2, 3, 4, \ldots$. Atunci din (*) rezultă că $|2K| \neq \emptyset$, deci $p_2 \neq 0$.

b) Există exact trei fibre multiple, toate cu $m_i \geqslant 3$. Atunci rezultă (mereu folosind (*)) $|3K| \neq \emptyset$, deci $p_3 \neq 0$.

c) Există exact trei fibre multiple cu $m_1 = 2$, $m_2, m_3 \geqslant 4$. Atunci $|4K| \neq \emptyset$.

d) Există exact trei fibre multiple cu $m_1 = 2$, $m_2 = 3$, $m_3 \geqslant 6$. Atunci $|6K| \neq \emptyset$.

În cazul A), dacă $\chi(O_X) = 1$, trebuie să avem $-1 + \sum_{i=1}^{r} (m_i - 1)/m_i \geqslant 0$, deci există cel puţin două fibre multiple. Atunci $|2K| \neq \emptyset$.

În cazul A), dacă $\chi(O_X) = 2$, atunci $|K| \neq \emptyset$.

B) $l(T) = 1$. Dacă $\chi(O_X) \geqslant 1$, atunci $|K| \neq \emptyset$ şi nu am mai avea nimic de demonstrat. Putem deci presupune $\chi(O_X) = 0$. Cum $\lambda' = -1$ în acest caz, avem $p_g = 0$. Deducem $q = 1$, şi deci se poate aplica (7.17). Deci dacă $f^{-1}(b_1)$ este fibra excepţională, atunci avem $a_1 = m_1 - 1$ sau $a_1 = m_1 - 1 - \alpha_1$, unde α_1 este un divizor comun al lui m_1 şi $a_1 + 1$. În plus, există cel puţin două fibre multiple şi $a_i = m_i - 1$ dacă $i \geqslant 2$.

a′) Există cel puţin două fibre multiple cu $a_i = m_i - 1$, şi atunci avem $|2K| \neq \emptyset$.

b′) Fibra excepţională satisface $m_1 = 3$, $a_1 = 1$, $\alpha_1 = 1$ şi $m_2 \geqslant 3$. Atunci $|3K| \neq \emptyset$.

c′₁) Fibra excepţională satisface $m_1 = 4$, $a_1 = 1$, $\alpha_1 = 2$, iar $m_2 \geqslant 4$. Atunci $|4K| \neq \emptyset$.

c$'_2$) Fibra excepţională satisface $m_1 = \beta_1\alpha_1$ cu $\beta_1 \geqslant 4$. Atunci $a_1/m_1 \geqslant 1/2$ şi $|2K| \neq \emptyset$.

d$'_1$) Fibra excepţională satisface $m_1 = 2\alpha_1$ $a_1, = \alpha_1 - 1$, $\alpha_1 \geqslant 3$ şi $m_2 \geqslant 3$. Atunci $|3K| \neq \emptyset$.

d$'_2$) Fibra excepţională satisface $m_1 = 3\alpha_1$, $a_1 = 2\alpha_1 - 1$. Atunci $|2K| \neq \emptyset$.

C) $l(T) \geqslant 2$. Atunci $|K| \neq \emptyset$.

Teorema (8.11) este astfel complet demonstrată.

Ca un corolar al demonstraţiei teoremei (8.11) (anume al faptului că dacă $p_g = 0$ şi X admite o fibrare eliptică sau cvasieliptică, cu X aparţinînd clasei b) sau clasei c), atunci $p_2 \neq 0$ sau există o fibrare $f: X \to P^1$ eliptică sau cvasieliptică de bază P^1) putem deduce imediat următoarea variantă sensibil îmbunătăţită a observaţiei (8.3) c):

(8.12). COROLAR. *Fie $f: X \to B$ o fibrare eliptică sau cvasieliptică, unde suprafaţa X este minimală. Atunci X nu poate aparţine clasei* d) *şi avem:*

i) *X aparţine clasei* a) $\Leftrightarrow \lambda(f) < 0 \Leftrightarrow c(X) = -1 \Leftrightarrow p_n = 0$ *pentru orice* $n \geqslant 1 \Leftrightarrow p_4 = p_6 = 0 \Leftrightarrow p_{12} = 0$

ii) *X aparţine clasei* b) $\Leftrightarrow \lambda(f) = 0 \Leftrightarrow c(X) = 0 \Leftrightarrow$ *există* $n \geqslant 1$ *astfel încît* $nK \sim 0 \Leftrightarrow 4K \sim 0$ *sau* $6K \sim 0 \Leftrightarrow 12K \sim 0$.

iii) *X aparţine clasei* c) $\Leftrightarrow \lambda(f) > 0 \Leftrightarrow c(X) = 1 \Leftrightarrow$ *există un* $n > 0$ *astfel încît* $|nK|$ *conţine un divizor strict pozitiv* $\Leftrightarrow |4K|$ *sau* $|6K|$ *conţine un divizor strict pozitiv* $\Leftrightarrow |12K|$ *conţine un divizor strict pozitiv.*

(8.13) *Remarcă.* O consecinţă a unui rezultat general al lui Raynaud (cf. Raynaud [1]) afirmă că m_i/α_i este o putere a exponentului caracteristic p al lui k, unde $p = 1$ dacă car(k) $= 0$ şi $p =$ car(k) dacă car(k) > 0. Acest rezultat arată în particular că multiplicitatea unei fibre excepţionale se divide cu p, iar pe de altă parte dacă car(k) $= 0$, atunci ţinînd cont şi de (7.15.6) rezultă că nu pot apărea fibre excepţionale în nici-o fibrare eliptică.

În plus, aceeaşi consecinţă a rezultatului lui Raynaud mai arată: cazul b$'$) din demonstraţia lui (8.11) poate apărea doar în car 3, cazul c$'_1$), doar în car 2, iar cazul d$'_2$) doar în car 3. Cu toate că acest rezultat este interesant în sine, el nu va fi folosit în continuare, aşa încît nu dăm demonstraţia sa.

(8.14) *Referinţe bibliografice.* Întregul material din acest paragraf este prezentat după Bombieri-Mumford [1].

§ 9.

TEOREMA DE CLASIFICARE DUPĂ DIMENSIUNEA CANONICĂ

(9.1) TEOREMĂ. *Fie X o suprafață minimală aparținînd clasei* d), *adică* $(K^2) > 0$ *și* $(K \cdot C) \geqslant 0$ *pentru orice curbă C de pe X. Atunci* $|2K| \neq \emptyset$, *iar pentru n suficient de mare sistemul linear $|nK|$ nu are puncte bază și definește un morfism* $\varphi_n = \varphi_{|nK|} : X \to |nK|$ *cu proprietățile următoare: imaginea* $X_n = \varphi_n(X)$ *este o suprafață normală avînd drept singularități cel mult puncte raționale duble și* φ_n *este un izomorfism între* $X - \varphi_n^{-1}(\mathrm{Sing}\ (X_n))$ *și* $X_n - \mathrm{Sing}\ (X_n)$, *unde prin* $\mathrm{Sing}(X_n)$ *am notat locul singular al lui* X_n. *În acest caz dimensiunea canonică a lui X este egală cu 2, iar inelul canonic $R(X)$ este o k-algebră finit generată (și de grad de transcendență 3 peste k).*

Demonstrație. Arătăm mai întîi că $|2K| \neq \emptyset$. Dacă prin absurd $|2K| = \emptyset$ (adică $p_2 = 0$), atunci după (5.1) avem $\Delta = 0$ și deci formula lui Noether devine:

$$10 = (K^2) + 8q + b_2,$$

de unde deducem $q \leqslant 1$. Pe de altă parte, teorema lui Riemann-Roch se scrie

(9.1.1) $$\chi(O_X(2K)) = (K^2) + \chi(O_X).$$

Folosind dualitatea Serre avem

$$\chi(O_X(2K)) = \dim H^0\ (O_X\ (2K)) + \dim H^0(O_X(-K)) -$$

$$-\dim H^1(O_X\ (2K)) = -\dim H^1\ (O_X\ (2K)) \leqslant 0,$$

deoarece $H^0(O_X(2K)) = 0$ prin ipoteză și $|-K| = \emptyset$ (într-adevăr, dacă $|-K| \neq \emptyset$, ar exista un $0 < \Delta \in |-K|$; există atunci o curbă integră C pe X astfel încît $(\Delta \cdot C) > 0$, și atunci avem $(K \cdot C) = -(\Delta \cdot C) < 0$, ceea ce contrazice ipotezele teoremei). Introducînd (9.1.1) în inegalitatea $\chi(O_X(2K)) \leqslant 0$ și ținînd cont că $\chi(O_X) = 1 - q + p_g = 1 - q \geqslant 0$, obținem inegalitatea $(K^2) + (1 - q) \leqslant 0$, de unde $(K^2) \leqslant 0$, contradicție. Deci în mod necesar avem $|2K| \neq \emptyset$.

Trecem acum la analiza sistemului linear complet $|nK|$ cu $n \geqslant 0$.

Fie pentru aceasta E o curbă integră pe X astfel încît $(K \cdot E) = 0$. Deoarece $(K^2) > 0$, teorema lui Hodge de index (2.4) implică $(E^2) < 0$, deoarece divizorul E nu poate fi numeric echivalent cu zero. Cum $0 \leqslant p_a(E) = 1/2(E^2) + 1/2(K \cdot E) + 1 = 1/2(E^2) + 1 \leqslant 0$, rezultă că $p_a(E) = 0$ și $(E^2) = -2$. Reciproc, orice curbă E cu $p_a(E) = 0$ și $(E^2) = -2$ (E integră), are proprietatea $(K \cdot E) = 0$.

Dacă pe suprafața X nu există nici-o asemenea curbă, atunci K este un divizor amplu în baza criteriului Nakai-Moishezon, și teorema este clară în acest caz (mai puțin faptul că inelul canonic $R(X)$ este k-algebră finit generată), deoarece se aplică (5.5).

Prin urmare rămîne să analizăm cazul cînd asemenea curbe pe X există. Vom arăta că $\{E \subset X \mid E$ curbă integră, $p_a(E) = 0$ și $(E^2) = -2\}$ este o mulțime finită. Acest fapt rezultă din teorema Néron-Severi de finitudine a numărului bază $\rho =$ rang $NS(X)$ și următoarea:

(9.1.2) *Afirmație.* Fie $E_1, \ldots, E_n$ n curbe integre pe X (distincte două cîte două) astfel încît $p_a(E_i) = 0$ și $(E_i^2) = -2$ (deci astfel încît $(K \cdot E_i) = 0$) pentru orice $i = 1, \ldots, n$. Atunci clasele lui $E_1, \ldots, E_n$ în $NS(X) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ sînt elemente linear independente peste $\mathbb{Q}$, iar matricea de intersecție $\|(E_i \cdot E_j)\|_{i,j}$ este definită negativ.

Demonstrația afirmației (9.1.2). Observăm mai întîi că de îndată ce știm că $E_1, \ldots, E_n$ definesc în $\mathbb{Q}$-spațiul vectorial $V = NS(X) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ elemente linear independente, atunci faptul că matricea de intersecție (pe care o vom nota prin M_n) este definită negativ este o consecință a faptului că indicele de intersecție $(\cdot)$ este o formă biliniară nedegenerată pe V de signatură $(1, \rho - 1)$ (vezi (2.4)).

Demonstrăm acum afirmația prin inducție după n, cazul $n = 1$ fiind evident. Fie deci $E_1, \ldots E_n$ n curbe (distincte două cîte două) cu proprietatea că $(K \cdot E_i) = 0$ pentru orice $i = 1, \ldots, n$ și care definesc elemente linear independente în V; fie E_{n+1} o curbă (integră ca și $E_1, \ldots, E_n$) distinctă de fiecare E_i, $(i = 1, \ldots, n)$ și cu proprietatea $(K \cdot E_{n+1}) = 0$. Presupunem prin absurd că ar exista o rela-

ţie de forma :

$$(9.1.3) \qquad E_{n+1} \approx a_1E_1 + \ldots + a_nE_n, \quad a_i \in \mathbb{Q}.$$

Notînd $Z = -\sum_{i=1}^{n} a_iE_i$, fie $Z = Z_1 - Z_2$, cu $Z_1 \geqslant 0$, $Z_2 \geqslant 0$ şi Z_1 şi Z_2 fără componente comune (mai exact, $Z_1 = -$ (suma acelor a_iE_i pentru care $a_i \leqslant 0$) şi $Z_2 =$ suma acelor a_iE_i pentru care $a_i \geqslant 0$). Deoarece $(Z_1 \cdot Z_2) \geqslant 0$ şi $(Z_2^2) \leqslant 0$ (într-adevăr, avem $(K \cdot Z_2) = 0$ şi deci după (2.4) $(Z_2^2) \leqslant 0$), rezultă $(Z \cdot Z_2) = (Z_1 \cdot Z_2) - (Z_2^2) \geqslant 0$. Cum $(Z \cdot E_i) = -(E_{n+1} \cdot E_i) \leqslant 0$ dacă $i \leqslant n$, rezultă $(Z \cdot Z_2) \leqslant 0$, de unde $(Z \cdot Z_2) = 0$ şi deci $(Z_2^2) = 0$. Cum Z_2 este o combinaţie lineară de elemente linear independente (făcînd parte din $E_1, \ldots, E_n$), deducem, conform observaţiei iniţiale, că $Z_2 = 0$. Cu alte cuvinte am demonstrat că $a_i \leqslant 0$ pentru orice $i = 1, \ldots, n$. Însă atunci relaţia (9.1.3) se mai poate scrie: $E_{n+1} + (-a_1)E_1 + \ldots + (-a_n)E_n \approx 0$, $(-a_i) \geqslant 0$ pentru orice i, lucru absurd pe o suprafaţă proiectivă. Afirmaţia (9.1.2) este deci dovedită.

Revenind la demonstraţia teoremei (9.1), fie deci $E_1, \ldots, E_n$ toate curbele integre (distincte două cîte două) de pe X care au proprietatea $(K \cdot E_i) = 0$ pentru orice i. Cum am văzut că atunci $p_a(E_i) = 0$, $(E_i^2) = -2$ pentru orice i, şi matricea de intersecţie $\|(E_i \cdot E_j)\|$ este definită negativ, din teorema (3.15) rezultă că există un morfism $\varphi: X \to Y$ care contractă subconfiguraţiile conexe din $E_1, \ldots, E_n$ la puncte normale, care este izomorfism între $X - \bigcup_{i=1}^{n} E_i$ şi $Y - \mathrm{Sing}(Y)$, şi pentru care fasciculul dualizant ω_Y este inversibil şi $\varphi^*(\omega_Y) = \omega_X$.

A verifica faptul că sistemul linear complet $|\omega_X^n|$ nu are puncte bază pentru $n \gg 0$ revine la a verifica faptul că sistemul linear complet $|\omega_Y^n|$ nu are puncte bază pentru $n \gg 0$. Însă $(\omega_Y \cdot \omega_Y) = (\omega_X \cdot \omega_X) = (K^2) > 0$, iar dacă F este o curbă integră arbitrară pe Y şi E este transformata sa proprie prin φ, atunci $(\omega_Y \cdot F) = (f^*(\omega_Y) \cdot E) = (\omega_X \cdot E) = (K \cdot E) > 0$, deoarece E nu se află printre curbele E_i cu proprietatea $(K \cdot E_i) = 0$. Aplicînd criteriul Nakai-Moishezon pe Y, rezultă că ω_Y este un O_Y-modul inversibil amplu. Deci pentru n suficient de mare sistemul linear complet $|\omega_Y^n|$ defineşte o scufundare a lui Y într-un spaţiu proiectiv P. Deci pentru n suficient de mare sistemul linear complet $|\omega_X^n|$ nu are puncte bază ($\omega_X^n \cong \varphi^*(\omega_Y^n)$) şi morfismul φ_n se identifică cu φ.

În fine, deoarece $\omega_Y^n \cong \varphi_*\varphi^*(\omega_Y^n) \cong \varphi_*(\omega_X^n)$ pentru orice $n \geqslant 1$, inelul canonic $R(X)$ se identifică cu $\Gamma_*(\omega_Y)$ al cărui grad

de transcendenţă peste k este, după (5.5), egal cu 3, deci $c(X) = 2$. (Observăm că ipoteza din (5.5), că X este varietate nesingulară, nu este importantă; lema (5.5) merge pentru orice varietate ireductibilă).

Tot din lema (5.5) deducem că pentru n suficient de mare sistemul linear complet $|\omega_Y^n|$ nu are puncte bază şi că algebra graduată (peste k) $\Gamma_*(\omega_Y^n) = (R(X))^{(n)}$ este finit generată (în general dacă S este o k-algebră graduată şi $n > 0$ un întreg strict pozitiv, atunci, punîndu-ne de acord cu EGA II, vom nota prin $S^{(n)}$ k-algebra graduată astfel încît $(S^{(n)})_s = S_{ns}$ pentru orice s întreg). Acum demonstraţia teoremei (9.1) se încheie folosind următoarea propoziţie a lui Zariski:

(9.2) PROPOZIŢIE. (Zariski). *Fie X o k-schemă algebrică proprie şi $L = O_X$-modul inversibil. Dacă $S = \Gamma_*(L)$ şi există un $n \geqslant 1$ astfel încît sistemul linear complet $|L^n|$ să nu admită puncte bază şi $S^{(n)} = \Gamma_*(L^n)$ să fie o k-algebră finit generată, atunci S este o k-algebră finit generată.*

Vom demonstra această propoziţie la sfîrşitul acestui paragraf (chiar într-o versiune mult mai generală, care ne va permite deducerea unui rezultat important al lui Zariski).

(9.3) Recapitulăm acum rezultatele privind clasificarea suprafeţelor demonstrate pînă în momentul de faţă. Fie X o suprafaţă minimală. Atunci:

i) X aparţine clasei a) $\Rightarrow c(X) = -1 \Rightarrow |4K| = \emptyset$ şi $|6K| = \emptyset$

ii) X aparţine clasei b) $\Rightarrow c(X) = 0 \Rightarrow 4K \sim 0$ sau $6K \sim 0$;

iii) X aparţine clasei c) $\Rightarrow c(X) = 1 \Rightarrow |4K|$ sau $|6K|$ este reprezentat de cîte un divizor strict pozitiv, şi $(K^2) = 0$.

iv) X aparţine clasei d) $\Rightarrow c(X) = 2$ şi în acest caz $|2K| \neq \emptyset$.

Deoarece clasele a), b), c) şi d) sînt disjuncte două cîte două şi epuizează toate modelele minimale de suprafeţe (proiective şi nesingulare) şi analog pentru suprafeţele minimale cu dimensiunea canonică $-1, 0, 1, 2$, rezultă că am demonstrat:

(9.4) TEOREMĂ. *Fie X o suprafaţă minimală. Atunci:*

i) *Există pe X o curbă integră C astfel încît $(K \cdot C) < 0 \Leftrightarrow c(X) = -1 \Leftrightarrow p_4 = 0$ şi $p_6 = 0 \Leftrightarrow p_{12} = 0$.*

ii) *Pentru orice curbă C de pe X avem $(K \cdot C) = 0 \Leftrightarrow c(X) = 0 \Leftrightarrow 4K \sim 0$ sau $6K \sim 0 \Leftrightarrow 12K \sim 0$.*

iii) *$(K^2) = 0$, $(K \cdot C) \geqslant 0$ pentru orice curbă C integră pe X şi există o curbă C' pe X astfel încît $(K \cdot C') > 0 \Leftrightarrow c(X) = 1 \Leftrightarrow (K^2) = 0$ şi $|4K|$ sau $|6K|$ este reprezentat de un divizor strict pozitiv $\Leftrightarrow |12K|$ este reprezentat de un divizor strict pozitiv şi $(K^2) = 0$.*

iv) *$(K^2) > 0$ şi $(K \cdot C) \geqslant 0$ pentru orice curbă integră C pe $X \Leftrightarrow c(X) = 2$. În acest caz $|2K| \neq \emptyset$.*

(9.5) DEFINIȚIE. O suprafață X se numește de *tip general* dacă $c(X) = 2$ și de tip special dacă $c(X) \leqslant 1$. Dacă X este suprafață minimală de tip general, atunci $X_n = \varphi_n(X)$ (în notațiile teoremei (9.1)) se numește modelul canonic de ordin n al lui X, sau n-modelul canonic al lui X.

Suprafețele de tip general sînt analogul în dimensiune 2 al curbelor proiective și nesingulare de gen $g \geqslant 2$. Pentru o suprafață de tip general (care este și minimală) n-modelul său canonic X_n este pentru n suficient de mare o suprafață proiectivă, normală, avînd drept singularități cel mult puncte raționale duble, morfismul φ_n este birațional (φ_n este într-adevăr morfism deoarece pentru $n \gg 0$ sistemul linear $|nK|$ nu are puncte bază), iar perechea (X_n, φ_n) este independentă de n. Dacă X_n este nesingulară pentru $n \gg 0$, atunci φ_n este chiar un izomorfism și deci ω_X este un O_X-modul amplu. Acest ultim fapt se întîmplă dacă și numai dacă nu există pe X nici-o curbă integră E cu $p_a(E) = 0$ și $(E^2) = -2$.

(9.6) *Exemple de suprafețe de tip general*. Un exemplu de suprafață de tip general a fost deja întîlnit la (5.8) ii) anume produsul a două curbe proiective și nesingulare C_1 și C_2 de genuri g_1 și $g_2 > 2$.

(9.6.1) Fie X o suprafață nesingulară și proiectivă scufundată în P^n astfel încît X este intersecție completă în P^n. Aceasta înseamnă că idealul omogen $I(X)$ al lui X în inelul polinoamelor $k[T_0, \ldots, T_n]$ (inelul de coordonate omogene al lui P^n) este generat de $n-2$ elemente omogene $f_1, \ldots, f_{n-2}$ de grade $d_1, \ldots, d_{n-2} > 0$ respectiv. Exprimîndu-ne geometric, vom spune că X este intersecția (completă) a hipersuprafețelor $H_1, \ldots, H_{n-2}$ de ecuații $f_1 = 0, \ldots, f_{n-2} = 0$ respectiv. Un rezultat general (vezi Serre [1], § 78) arată că X este proiectiv normală în P^n (adică omomorfismul canonic Serre (vezi demonstrația lui (5.5), Serre [1], sau EGA II este un izomorfism) și $H^1(X, O_X(s)) = 0$ pentru orice $s \in \mathbb{Z}$, iar $\omega_X = O_X\left(\sum_{i=1}^{n-2} d_i - n - 1\right)$, unde prin $O_X(s)$ am notat $O_{P^n}(s) \otimes O_X$.

Deci dacă $\sum_{i=1}^{n-2} d_i > n + 1$, atunci ω_X este un O_X-modul inversibil amplu. În particular, dacă E este o curbă integră pe X, atunci $(\omega_X \cdot E) > 0$., și prin urmare E nu poate fi curbă excepțională de prima specie (dacă E ar fi excepțională de prima specie am avea $(\omega_X \cdot E) = -1$.). În concluzie, dacă $\sum_{i=1}^{n-2} d_i > n + 1$, atunci X este o suprafață minimală de tip general cu iregularitatea $q = 0$. În particular, dacă X este o suprafață nesingulară de grad d în P^3 și $d \geqslant 5$ atunci X este o suprafață minimală de tip general cu $q = 0$.

(9.6.2) Fie X' suprafaţa din P^3 dată de ecuaţia

$$T_0^5 + T_1^5 + T_2^5 + T_3^5 = 0.$$

Dacă caracteristica lui k este diferită de 5, atunci, după cele spuse mai sus, X' este o suprafaţă nesingulară, minimală de tip general cu $q(X') = 0$. Fie ξ o rădăcină primitivă de ordin 5 a unităţii, şi $u : X' \to X'$ automorfismul lui X' definit prin $u(t_0, t_1, t_2, t_3) = (t_0, \xi t_1, \xi^2 t_2, \xi^3 t_3)$. Atunci u este un automorfism de ordin 5 ($u^5 = \mathrm{id}$). Se vede imediat că u nu are niciun punct fix pe X'. Dacă G este subgrupul de ordin 5 al grupului $\mathrm{Aut}(X')$ al tuturor automorfismelor algebrice ale lui X', atunci suprafaţa factor $X = X'/G$ este nesingulară (deoarece u nu are puncte fixe pe X') şi proiectivă. Fie $f : X' \to X$ morfismul canonic. Atunci omomorfismul canonic de O_X-module $O_X \xrightarrow{\alpha} f_*(O_{X'})$ splitează, adică există un omomorfism de O_X-module $\beta : f_*(O_{X'}) \to O_{X'}$ astfel încît $\beta \circ \alpha = \mathrm{id}$. Într-adevăr deoarece f este finit putem defini omomorfismul urmă $T : f_*(O_{X'}) \to O_X$ şi punem $\beta = 1/5 \cdot T$. De aici rezultă că omomorfismul indus de $H^1(O_X) \to H^1(f_*(O_{X'})) = H^1(O_{X'})$ este injectiv. Cum $H^1(O_{X'}) = 0$ (deoarece X' este intersecţie completă), atunci $H^1(O_X) = 0$.

Pe de altă parte, $\omega_X = O_{X'}(1)$ (vezi (9.6.1)) şi cum X' este proiectiv normală, rezultă

$$p_g(X') = \dim H^0(X', \omega_{X'}) = \dim H^0(X', O_{X'}(1)) = 4,$$

de unde $\chi(O_{X'}) = 1 - q(X') + p_g(X') = 5$. Acum folosim:

(9.7) Propoziţie. *Dacă $f : X \to X'$ este un morfism etal de grad n între două suprafeţe X' şi X, atunci* $\chi(O_{X'}) = n\chi(O_X)$.

Acceptînd pentru moment această propoziţie, rezultă atunci că $\chi(O_X) = 1$, adică $1 - q(X) + p_g(X) = 1$. Cum am văzut că $q(X) = 0$, deducem $p_g(X) = 0$. Deoarece f este morfism etal avem $f^*(\omega_X) \cong \omega_{X'}$ şi cum $\omega_{X'}$ este amplu pe X' rezultă ω_X amplu pe X (vezi EGA III sau Hartshorne [3], pag. 25). În particular, X este suprafaţă minimală.

Deci X este un exemplu de suprafaţă de tip general cu $q = p_g = 0$. Suprafaţa X este cunoscută sub denumirea de suprafaţa lui Godeaux.

Demonstraţia propoziţiei (9.7). Enunţul propoziţiei (9.7) este adevărat şi pentru varietăţi proiective şi nesingulare X' şi X de dimensiune arbitrară şi este o consecinţă a teoremei lui Riemann-Roch-Grothendieck (vezi Borel-Serre [1]). Vom da argumentul direct în cazul suprafeţelor, bazîndu-ne pe formula lui Noether.

Deoarece f este morfism etal avem $f^*(\Omega^1_{X/k}) = \Omega^1_{X'k}$ (f este morfism neted de dimensiune relativă 0, şi afirmaţia rezultă din şirul exact canonic $0 \to f^*(\Omega^1_{X/k}) \to \Omega^1_{X'/k} \to \Omega^1_{X'/X} = 0$, vezi Altman-Kleiman [1], pag. 147, sau Hartshorne [1], pag. 269). Rezultă $f^*(T_X) = T_{X'}$, unde T_X (resp. $T_{X'}$) este fibratul tangent al lui X (resp. al lui X'), şi deci :

$$\underset{\sim}{c}_2(X') = \underset{\sim}{c}_2(T_{X'}) = \underset{\sim}{c}_2(f^*(T_X) = f^*\underset{\sim}{c}_2(T_{X'}) = f^*\underset{\sim}{c}_2(X)$$

unde sublinierea înseamnă că ne găsim în inelul lui Chow $A(X')$ sau $A(X)$. Trecînd la grade în relaţia obţinută avem :

$$c_2(X') = (\deg(f)) \cdot c_2(X) = nc_2(X).$$

Pe de altă parte, deoarece $\omega_{X'} = f^*(\omega_X)$, avem după (1.18) :

$$(\omega_{X'} \cdot \omega_{X'}) = n \cdot (\omega_X \cdot \omega_X).$$

Ţinînd acum cont de formula lui Noether, obţinem :

$$\chi(O_{X'}) = 1/12. [(\omega_{X'} \cdot \omega_{X'}) + c_2(X')] = 1/12 [n(\omega_X \cdot \omega_X) +$$
$$+ nc_2(X)] = n\chi(O_X) \quad \text{Q.E.D.}$$

Ţinînd cont de formula explicită a clasei canonice a unei suprafeţe eliptice sau cvasieliptice (adică o suprafaţă X pentru care există o fibrare eliptică sau cvasieliptică), de (7.13) şi de propoziţia (9.2), punctele ii) şi iii) ale teoremei (9.4) pot fi reformulate mai precis.

(9.8) TEOREMĂ. *Fie X o suprafaţă minimală. Următoarele afirmaţii sînt echivalente* :

i) $c(X) = 0$.

ii) X aparţine clasei b).

iii) $12K \sim 0$

În oricare din aceste situaţii inelul canonic $R(X)$ este o k-algebră finit generată (şi de grad de transcendenţă 1).

(9.9) TEOREMĂ. *Fie X o suprafaţă minimală. Următoarele afirmaţii sînt echivalente* :

i) $c(X) = 1$.

ii) *X aparţine clasei c).*

iii) *Sistemul linear complet $|12K|$ conţine un divizor strict pozitiv şi $(K^2) = 0$.*

iv) *Există o fibrare eliptică sau cvasieliptică* $f: X \to B$ *cu* $\lambda(f) > 0$.

v) *Există o fibrare eliptică sau cvasieliptică* $f: X \to B$ *și un* $n > 0$ *astfel încît* $nK \sim f^*(D)$, *cu* D *divizor strict pozitiv pe curba* B.

În oricare din aceste situații sistemul linear complet $|nK|$ *nu are puncte bază pentru un* $n > 0$, *iar inelul canonic* $R(X)$ *este o* k-*algebră finit generată (de grad de transcendență 2).*

(9.10) COROLAR. (Zariski-Mumford). *Dacă* X *este o suprafață proiectivă și nesingulară arbitrară, atunci inelul canonic* $R(X)$ *este o* k-*algebră finit generată.*

Demonstrație. După (6.3) există un morfism birațional $f: X \to Y$ cu Y model minimal, iar după (5.7), f induce un izomorfism $R(X) \cong R(Y)$. Rezultă că, fără a restrînge generalitatea, putem presupune că X este suprafață minimală. Dacă $c(X) = -1$, atunci $R(X) = k$. Dacă $c(X) = 0$, $R(X)$ este finit generată peste k conform teoremei (9.8), dacă $c(X) = 1$, conform teoremei (9.9), iar dacă $c(X) = 2$ — conform teoremei (9.1). Q.E.D.

Rămîne acum să demonstrăm propoziția (9.2). După cum am mai spus, vom demonstra de fapt un rezultat mult mai general al lui Zariski. Avem însă nevoie de cîteva pregătiri.

(9.11). Fie $m \geqslant 1$ un număr natural fixat și fie $\mathbb{Z}^m$ grupul aditiv $\mathbb{Z} \times \ldots \times \mathbb{Z}$ (de m ori). Printr-un inel m-graduat S vom înțelege un inel comutativ S înzestrat cu o descompunere $S = \bigoplus_{a \in \mathbb{Z}^m} S_a$, cu S_a grup abelian pentru orice $a \in \mathbb{Z}^m$, astfel încît pentru orice $a, b \in \mathbb{Z}^m$, aplicația de înmulțire $S \times S \to S$ se factorizează prin $S_a \times S_b \to S_{a+b}$. În particular, S_0 este un subinel al lui S și S_a este un S_0-modul pentru fiecare $a \in \mathbb{Z}^m$. Dacă $m = 1$, obținem definiția uzuală de inel graduat.

Pentru fiecare $1 \leqslant i \leqslant m$ vom nota prin e_i elementul $(0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0)$. în care 1 apare numai pe locul i. Date fiind inelul m-graduat S și S-modulul m-graduat (definiția fiind acum clară), vom spune că E este i-finit dacă există un număr natural n astfel încît aplicațiile $S_{e_i} \times E_a \to E_{e_i+a}$ sînt surjective ori de cîte ori $a_i \geqslant n$, unde $a = (a_1 \ldots, a_m)$. Dacă E este i-finit pentru orice $i = 1, \ldots, m$, vom spune că E este polifinit.

(9.12) LEMĂ. *Fie* S *un inel* m-*graduat,* S' — S_0-*subalgebra lui* S *generată de toate elementele lui* S *de grad total 1, și* E *un* S-*modul* m-*graduat. Dacă* E *este finit generat ca* S'-*modul, atunci* E *este polifinit. Reciproc, dacă presupunem că fiecare* E_a *este finit generat ca* S_0-*modul și* $E_a = 0$ *pentru orice* $a \leqslant 0$ *(în ordinea parțială naturală a lui* $\mathbb{Z}^m$*), atunci* E *polifinit implică* E *finit generat ca* S'-*modul.*

Demonstrație. Vom folosi următoarele afirmații imediate:

a) E este i-finit $\Rightarrow E(a)$ este i-finit pentru orice $a \in \mathbb{Z}^m$, unde $E(a)$ este S-modulul m-graduat astfel încît $E(a)_b = E_{a+b}$.

b) Dacă E și E' sînt i-finite $\Rightarrow E \oplus E'$ este i-finit.

c) Orice modul cît al unui S-modul m-graduat i-finit este i-finit.

Este clar că S' este polifinit peste el însuși, și chiar mai mult, S'-modulul E m-graduat și finit generat este polifinit ca S'-modul. Într-adevăr, deoarece E este S'-modul finit generat, E este izomorf cu un cît al unei sume directe de S'-module de forma $S'(a)$ și se aplică a), b) și c) și faptul că S' este polifinit peste el însuși.

Reciproc, dacă E este S-polifinit, atunci există un $b \in \mathbb{Z}^m$ astfel încît aplicațiile $S_{e_i} \times E_a \to E_{e_i+a}$ sînt surjective dacă $a_i \geqslant b_i$, ($i = 1, \ldots, m$). Atunci rezultă imediat că $\bigoplus_{a \leqslant b} E_a$ generează pe E ca S'-modul. Din ipoteze rezultă că $\bigoplus_{a \leqslant b} E_a$ este finit generat ca S_0-modul, deci E este S'-modul finit generat. Q.E.D.

(9.13) Propoziție. *Fie k un corp, $V_1, \ldots, V_m$ m k-spații vectoriale de dimensiune finită și $Y = P(V_1) \times \ldots \times P(V_m)$, unde $P(V_i)$ este spațiul proiectiv asociat k-spațiului vectorial V_i. Dacă F este un O_Y-modul coerent și $a \in \mathbb{Z}^m$, fie $F(a) = F \otimes p_1^*(O(a_1)) \otimes \ldots \otimes p_m^*(O(a_m))$, cu p_i proiecția canonică a lui Y pe $P(V_i)$. Atunci:*

i) *Aplicația naturală Serre*

$$S = S(V_1) \otimes_k \ldots \otimes_k S(V)_m \to \bigoplus_{a \in \mathbb{Z}^m} H^0(Y, O_Y(a))$$

este un izomorfism de inele m-graduate, unde $S(V_i)$ este k-algebra simetrică a lui V_i.

ii) $H^q(Y, O_Y(a)) = 0$ *pentru orice* $q \geqslant 1$ *și* $a \geqslant 0$.

iii) $\bigoplus_{a \geqslant 0} H^q(Y, F(a))$ *este un S-modul finit generat.*

iv) *Dacă* $q \geqslant 1$ $H^q(Y, F(a)) = 0$ *pentru orice* $a \gg 0$.

Demonstrație. Cazul $m = 1$ coincide cu o teoremă binecunoscută a lui Serre (vezi EGA III sau FAC).

Presupunem mai întîi că am demonstrat i), ii) și iii) pentru $F = O_Y(b)$ în general (adică m arbitrar). Atunci iii) pentru F și iv) rezultă în modul următor. Deoarece Y se scufundă prin imersia lui Segre într-un spațiu proiectiv via O_Y-modulul inversibil foarte amplu $L = O_Y(1, 1, \ldots, 1)$, orice O_Y-modul coerent este un cît al unei sume directe finite F' de exemplare de forma L^j cu j întreg.

Cum iii) şi iv) sînt adevărate pentru F' şi de asemenea pentru orice F dar cu condiţia $q > \dim(Y)$, rezultă din şirul exact

$$0 \to G \to F' \to F \to 0$$

şirul exact de coomologie

$$H^q(Y, F'(a)) \to H^q(Y, F(a)) \to H^{q+1}(Y, G(a)).$$

Atunci iii) şi iv) rezultă în cazul general folosind inducţie descrescătoare după q şi faptul că iii) şi iv) sînt adevărate pentru F'.

Rămîne deci de probat i), ii) şi iii) în cazul $F = O_Y(b)$. Presupunînd acestea adevărate pentru m şi $Y = P(V_1) \times \ldots \times P(V_m)$ fie V un k-spaţiu vectorial finit dimensional şi fie diagrama carteziană:

$$\begin{array}{ccc} Y \times P(V) & \xrightarrow{g} & P(V) = P \\ {\scriptstyle f}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle h} \\ Y & \xrightarrow{p} & \mathrm{Spec}(k) \end{array}$$

Dacă $a \in \mathbb{Z}^m$ şi $n \in \mathbb{Z}$ atunci $O_{Y\times P}(a, n) = f^*O_Y(a) \otimes g^*O_P(n)$. Folosind formula proiecţiei, aplicaţia naturală $O_Y(a) \otimes R^qf_*(g^*O_P(n)) \to R^qf_*(O_{Y\times P}(a, n))$ este un izomorfism. De asemenea, cum p este plat, aplicaţia naturală $p^*R^qh_*O_P(n) \to R^qf_*(g^*O_P(n))$ este un izomorfism. Din aceste două izomorfisme obţinem că $R^qf_*O_{Y\times P}(a, n) = O_Y(a) \otimes H^q(P, O_P)$ de unde

$$(*) \quad H^p(Y, O_Y(a)) \otimes_k H^q(P, O_P(n)) = H^p(Y, R^qf_*O_{Y\times P}(a, n)).$$

Din ipoteza de inducţie aplicaţia naturală

$$S_a \otimes S^n(V) \to H^0(Y, O_Y(a)) \otimes_k H^0(P, O_P(n)) \cong$$

$$\cong H^0(Y \times P, O_{Y\times P}(a, n))$$

este un izomorfism, deci *i*) este dovedit şi pentru $Y \times P(V)$.

Folosind ipoteza de inducţie pentru *ii*) şi izomorfismul (*), vedem că dacă $(a, n) \geq 0$, $H^p(Y, R^qf_*O_{Y\times P}(a, n)) = 0$ dacă $p > 0$ sau $q > 0$.

Şirul spectral Leray

$$E_2^{pq} = H^p(Y, R^q f_* O_{Y\times P}(a, n)) \Rightarrow H^{p+q}(Y \times P, O_{Y\times P}(a, n))$$

degenerează şi deci

$$H^p(Y, f_* O_{Y\times P}(a, n)) \cong H^p(Y \times P, O_{Y\times P}(a, n)).$$

Însă cum pentru $p > 0$

$$H^p(Y, f_* O_{Y\times P}(a, n)) \cong H^p(Y, O_Y(a)) \otimes {}_k H^0(P, O_P(n)),$$

deducem că ii) este valabil şi pentru $Y \times P$ (dacă presupunem ii) valabil pentru Y).

În fine, din ipoteza de inducţie $\bigoplus_{a\geq 0} H^p(Y, O_Y(b + a))$ este un S-modul finit generat, iar $\bigoplus_{n\geq 0} H^q(P, O_P(n' + n))$ este un $S(V)$-modul finit generat pentru orice $b \in \mathbb{Z}^m$, $n' \in \mathbb{Z}$. Deci ţinînd cont de (*), produsul lor tensorial $\bigoplus_{(a,n)\geq 0} H^p(Y, R^q f_* O_{Y\times P}(b + a, n' + n))$ este un $S \otimes {}_k S(V)$-modul finit generat. Deci şi limita şirului spectral considerat este finit generată şi propoziţia (9.13) este complet demonstrată. Q.E.D.

(9.14) Teoremă. (Zariski). *Fie F un O_X-modul coerent pe schema X proprie peste k, şi fie $L_1, \ldots, L_m$ $(m \geq 1)$ m O_X-module inversibile pe X. Fie T un subinel m-graduat al inelului m-graduat (cu înmulţirea indusă de produsul tensorial) $\bigoplus_{a\geq 0} H^0(X, L_1^{a_1} \otimes \ldots \otimes L_m^{a_m})$ şi E un T-submodul graduat al lui $\bigoplus_{a\geq 0} H^n(X, F \otimes L_1^{a_1} \otimes \ldots \otimes L_m^{a_m})$ $(n \geq 0)$. Dacă sistemele lineare T_{e_i} nu au puncte bază pentru orice $i = 1, \ldots, m$, atunci E este polifinit.*

Demonstraţie. Fie $V_i = T_{e_i} \subset H^0(X, L_i)$. Deoarece V_i nu au puncte bază, există un morfism $f_i : X \to P(V_i)$ astfel încît $f_i^*(O(1)) \cong L_i$. Atunci dacă $f : X \to Y = P(V_1) \times \ldots \times P(V_m)$ este morfismul determinat de $f_1, \ldots, f_m$, avem $f^*(O(a)) \cong L_1^{a_1} \otimes \ldots \otimes L_m^{a_m}$ pentru orice $a = (a_1, \ldots, a_m) \in \mathbb{Z}^m$. Cum f este propriu, fasciculele $R^q f_*(F)$ sînt coerente pe Y, şi deci după propoziţia (9.13) S-modulul m-graduat

$$E_2^{pq} = \bigoplus_{a\geq 0} H^p(Y, R^q f_*(F(a)))$$

este finit generat, deci şi limita $\bigoplus_{a\geq 0} H^n(X, F(a))$ a şirului spectral E_2^{pq} este de asemenea un S-modul finit generat. Cum S este noethe-

rian, S-submodulul E este tot finit generat. Deoarece $T_{e_i} = S_{e_i}$, din lema (9.12) rezultă că E este polifinit ca T-modul. Q.E.D.

(9.15) *Demonstrația propoziției* (9.2). În notațiile propoziției (9.2) fie $L_1 = L^n$, $F = L^i$, $0 \leqslant i < n$, $T = \bigoplus_{a\geqslant 0} H^0(X, L_1^a) = \Gamma_*(L_1) = \Gamma_*(L^n)^{\cdot} = {}^{\cdot}S^{(n)}$. Avem $T_1 = H^0(X, L^n)$ și prin ipoteză T_1 nu are puncte bază. Fie $E = \bigoplus_{a\geqslant 0} H^0(X, F \otimes L_1^a) = \bigoplus_{a\geqslant 0} H^0(X, L^{an+i})$. Din teorema (9.14) rezultă că E este un T-modul polifinit (= finit deoarece $m = 1$). Altfel spus, pentru $a \geqslant 0$ aplicația naturală

$$H^0(X, L^n) \otimes H^0(X, L^{an+i}) \to H^0(X, L^{(a+1)n+i})$$

este surjectivă pentru orice $i = 0, 1, \ldots, n-1$. Deoarece $S^{(n)}$ este o k-algebră finit generată rezultă că și S este o k-algebră finit generată, deoarece $S_m = H^0(X, L^m)$ sînt k-spații vectoriale de dimensiune finită. Q.E.D.

(9.16) *Remarcă*. Observăm că teorema (9.14) a intervenit în demonstrația propoziției (9.2) numai în cazul particular $m = 1$. În acest caz teorema (9.14) are o demonstrație mult mai scurtă, cu toate că utilizează aceeași idee. Demonstrația teoremei (9.14) prezentată aici aparține lui A. Ogus [1]. Demonstrația originală a lui Zariski este complicată și nu face apel la teoria fasciculelor (vezi Zariski [1]). Ca să ilustrăm importanța considerării mai multor sisteme lineare simultan (adică $m > 1$), vom deduce următorul rezultat:

(9.17) TEOREMĂ. (Zariski [1]). *Fie X o varietate proiectivă și nesingulară de dimensiune $\geqslant 2$ și $|D|$ un sistem linear complet pe X cu un număr finit de puncte bază. Atunci există un $n > 0$ astfel încît sistemul linear complet $|nD|$ să nu aibă puncte bază. (Mai exact, acest lucru se întîmplă dacă n este suficient de mare.)*

Demonstrație. Fie H o secțiune hiperplană generică (în particular H ocolește punctele bază ale lui $|D|$). Fie $T = \mathrm{Im}(\sigma) = \bigoplus_{(i,j)\geqslant 0} \mathrm{Im}(\sigma_{ij})$ subinelul lui $\bigoplus_{(i,j)\geqslant 0} H^0(H, L_{ij} \otimes O_H)$, unde $L_{ij} = O_X(iH + jD)$, iar componenta de ordin (i, j) a lui σ este omomorfismul canonic de restricție

$$\sigma_{ij} : H^0(X, L_{ij}) \to H^0(H, L_{ij} \otimes O_H).$$

Deoarece sistemele lineare T_{10} și T_{01} nu au puncte bază pe H, rezultă din (9.14) că T este polifinit, deci există $N > 0$ astfel încît pentru orice $i \geqslant 0$ și $j \geqslant N$, omomorfismul canonic

$$T_{i,j-1} \otimes_k T_{01} = (\mathrm{Im}(\sigma_{i,j-1})) \otimes_k (\mathrm{Im}\ (\sigma_{01}) \xrightarrow{\tau} \mathrm{Im}(\sigma_{ij}))$$

să fie surjectiv. Considerăm atunci diagrama comutativă:

$$\begin{array}{ccccccc} & & H^0(X, L_{i,j-1}) \otimes_k H^0(X, L_{01}) & \to & \mathrm{Im}(\sigma_{i,j-1}) \otimes \mathrm{Im}(\sigma_{01}) & \to & 0 \\ & & \downarrow v & & \downarrow \tau & & \\ 0 \to H^0(X, L_{i-1,j}) & \xrightarrow{u} & H^0(X, L_{ij}) & \longrightarrow & \mathrm{Im}(\sigma_{ij}) & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

Surjectivitatea lui τ implică $H^0(X, L_{ij}) = \mathrm{Im}\,(v) + \mathrm{Im}\,(u)$, unde u este omomorfismul dat de $s \mapsto s \otimes h$, cu $h \in H^0(X, L_{10})$ astfel încît $\mathrm{div}_X(h) = H$.

Pe de altă parte, pentru un $j \geqslant N$ fixat și pentru $i \geqslant 0$, L_{ij} este generat de secțiunile sale globale. Fie x un punct bază al lui D. Atunci este clar că x este punct bază pentru orice divizor de forma $\mathrm{div}_X(s)$ cu $s \in \mathrm{Im}\,(v)$. Din egalitatea $H^0(X, L_{ij}) = \mathrm{Im}\,(v) + \mathrm{Im}\,(u)$ deducem că atunci x nu poate fi punct bază pentru sistemul linear $|L_{i-1,j}| + H$. Cum $x \notin H$, rezultă că x nu este punct bază nici pentru sistemul linear $|L_{i-1,j}|$. Repetînd acest argument, deducem prin inducție descrescătoare după i că x nu este punct bază pentru $|L_{ij}|$ oricare ar fi $i \geqslant 0$. În particular, x nu este punct bază pentru $|L_{0j}| = |jD|$. Q.E.D.

(9.18) *Referințe bibliografice.* Teorema (9.1) aparține lui Mumford (cf. Mumford [3]) și justifică prezentarea singularităților raționale duble și criteriul de contractibilitate (3.15). Demonstrația prezentată conține mici modificări față de cea din Mumford [3]. Teoremele (9.4), (9.8) și (9.9) sînt consecințe ale rezultatelor din § 8 și a teoremei (9.1). Propoziția (9.2) apare în Zariski [1] împreună cu generalizarea sa din (9.13). Demonstrațiile originale ale lui Zariski sînt complicate, și de aceea am preferat demonstrația comologică mai simplă a lui Ogus [1]. Teorema (9.17) aparține tot lui Zariski (loc. cito.). Exemplul (9.6.2) aparține lui Godeaux și este preluat după Beauville [1].

§ 10.

SUPRAFEȚE CU DIMENSIUNEA CANONICĂ ZERO (car $\neq$ 2,3)

(10.1) Reamintim lista cu suprafețele minimale X cu $(K^2) = 0$ și $p_g \leqslant 1$ obținută în §8:

1. $b_2 = 22,\ b_1 = 0,\ \chi(O_X) = 2,\ q = 0,\ p_g = 1$ și $\Delta = 0.$

2. $b_2 = 14,\ b_1 = 2,\ \chi(O_X) = 1,\ q = 1,\ p_g = 1$ și $\Delta = 0.$

3. $b_2 = 10,\ b_1 = 0,\ \chi(O_X) = 1 \left\langle \begin{array}{l} q = 0,\ p_g = 0 \text{ și } \Delta = 0, \text{ sau} \\ q = 1,\ p_g = 1 \text{ și } \Delta = 2. \end{array} \right.$

4. $b_2 = 6,\ b_1 = 4,\ \chi(O_X) = 0,\ q = 2,\ p_g = 1$ și $\Delta = 0.$

5. $b_2 = 2,\ b_1 = 2,\ \chi(O_X) = 0 \left\langle \begin{array}{l} q = 1,\ p_g = 0 \text{ și } \Delta = 0, \text{ sau} \\ q = 2,\ p_g = 1 \text{ și } \Delta = 2. \end{array} \right.$

Am observat deja că orice suprafață minimală X cu $c(X) = 0$ are proprietățile $(K^2) = 0$ și $p_g \leqslant 1$, deci face parte din una din cele cinci categorii enumerate mai sus.

(10.2) TEOREMĂ. *Nu există suprafețe minimale X cu proprietățile $c(X) = 0$ și $b_2 = 14$.*

Demonstrație. Din lista de mai sus rezultă că $b_1 = 2 = 2s$, și deci $s = \dim \mathrm{Pic}^0(X) = 1$. În particular, varietatea lui Picard $P(X)$ este netrivială. Aceasta înseamnă că există un O_X-modul inversibil

L algebric echivalent cu zero şi neizomorf cu O_X. După teorema Riemann-Roch avem

$\chi(L) = 1/2(L \cdot L \otimes \omega_X^{-1}) + \chi(O_X) = \chi(O_X) = 1$ (din tabelul (10.1)) deci $H^0(L) \neq 0$ sau $H^2(L) \neq 0$. Deoarece $\omega_X \approxeq 0$ şi $p_g = 1$ avem $\omega_X \cong O_X$, deci după teorema de dualitate avem $H^2(L) \cong H^0(L^{-1})$. Rezultă $H^0(L) \neq 0$ sau $H^0(L^{-1}) \neq 0$, şi de aici $L \cong O_X$ sau $L^{-1} \cong O_X$ (deoarece $L \approxeq 0$), ceea ce este absurd. Q.E.D.

Teorema (10.2) şi tabelul (10.1) arată că în funcţie de al doilea număr Betti $b_2 = b_2(X)$ rămîn de analizat pentru posibilităţi de suprafeţe minimale X cu $c(X) = 0$: $b_2 = 22$, $b_2 = 10$, $b_2 = 6$ şi $b_2 = 2$.

(10.3) Teoremă. *Fie X o suprafaţă minimală. Următoarele două afirmaţii sînt echivalente:*

a) $c(X) = 0$ *şi* $b_2 = 22$.

b) $K \sim 0$ *şi* $q = 0$.

Suprafeţele X care satisfac una din aceste două proprietăţi echivalente poartă numele de suprafeţe K3 şi au în plus următoarele proprietăţi:

i) $\mathrm{Pic}^\tau(X) = 0$, *altfel spus grupul lui Picard* $\mathrm{Pic}(X)$ *nu are torsiune, şi deci după teorema lui Néron-Severi* $\mathrm{Pic}(X)$ *este un grup liber de rang finit.*

ii) *Dacă $f: X' \to X$ este o acoperire etală a lui X, atunci f este un izomorfism. Altfel spus, X este o suprafaţă simplu conexă.*

Demonstraţie. Mai întîi echivalenţa dintre condiţiile a) şi b). Implicaţia a) $\Rightarrow$ b): faptul că $q = 0$ rezultă din tabelul (10.1), iar faptul că $K \sim 0$ rezultă din $\omega_X \approxeq 0$ şi $p_g = 1$ (conform aceluiaşi tabel). Reciproc, dacă $K \sim 0$, atunci este clar că $c(X) = 0$. Din tabelul (10.1) vedem că singurele posibilităţi pentru $q = 0$ apar în cazurile 1) (adică $b_2 = 22$) şi 3) (în primul subcaz). A doua posibilitate este exclusă deoarece $p_g = 0$, ceea ce contrazice ipoteza $K \sim 0$.

Demonstrăm acum proprietatea i). Deoarece $q = 0$, $H^1(O_X) = 0$. Cum $H^1(O_X)$ se identifică cu spaţiul tangent în origine la schema în grupuri $\mathrm{Pic}^\tau(X)$, rezultă că $\mathrm{Pic}^\tau(X)$ este un grup discret (finit). Presupunem că acest grup ar fi netrivial. Fie atunci L un O_X-modul inversibil numeric echivalent cu zero şi neizomorf cu O_X. Din teorema Riemann-Roch deducem $\chi(L) = \chi(O_X) = 2$, şi deci $H^0(L) \neq 0$ sau $H^2(L) \neq 0$. Cum $\omega_X \cong O_X$, din dualitatea Serre rezultă că $H^0(L) \neq 0$ sau $H^0(L^{-1}) \neq 0$, şi cum $L \approxeq 0$, rezultă $L \cong O_X$ sau $L^{-1} \cong O_X$, ceea ce este absurd. Deci $\mathrm{Pic}^\tau(X) = 0$.

Demonstrăm acum ii). Fie $f: X' \to X$ o acoperire etală de grad n a lui X. Deoarece $\omega_{X'} = f^* (\omega_X) \cong O_{X'}$, $c(X') = 0$, X' este model minimal şi $p_g(X') = 1$. Deci X' se află în tabelul (10.1). Folosind acum propoziţia (9.7) deducem $\chi(O_{X'}) = n\chi(O_X) = 2n$. Însă dacă $n > 1$ vedem că în tabelul (10.1) nu există suprafeţe X' cu $\chi(O_{X'}) > 2$. Deci $n = 1$, adică f este izomorfism. Q.E.D.

(10.4) *Exemple de suprafeţe K3*. Fie X o suprafaţă nesingulară intersecţie completă în P^n ($n \geq 3$) a hipersuprafeţelor $H_1, \ldots, H_{n-2}$ de grade $d_1, \ldots, d_{n-2}$. O condiţie necesară ca X să fie suprafaţă $K3$ este ca $\sum_{i=1}^{n-2} d_i = n + 1$. Într-adevăr, dacă X este suprafaţă $K3$, atunci $\omega_X = O_X(\sum_{i=1}^{n-2} d_i - n - 1) \cong O_X$. Reciproc, dacă X este intersecţie completă (nesingulară) a hipersuprafeţelor $H_1, \ldots, H_{n-2}$ de grade $d_1, \ldots, d_{n-2}$ astfel încît $\sum_{i=1}^{n-2} d_i = n + 1$, atunci X este suprafaţă $K3$ deoarece $\omega_X \cong O_X$ şi $H^1(O_X) = 0$ (vezi (9.6.1)) În particular, orice suprafaţă nesingulară de grad 4 din P^3 este suprafaţă $K3$. De asemenea, orice intersecţie completă (nesingulară) de trei cuadrice din P^5 este o suprafaţă $K3$.

O altă clasă importantă de suprafeţe $K3$ o constituie suprafeţele Kummer asociate varietăţilor abeliene de dimensiune 2.

(10.5) *Suprafeţe Kummer*. Fie k un corp algebric închis de caracteristică diferită de 2 şi X o varietate abeliană de dimensiune 2 peste k. Considerăm automorfismul $\tau: X \to X$ dat de formula $\tau(x) = -x$ (opusul lui x faţă de operaţia de grup a lui X). Este clar că $\tau^2 = 1_X$. Obţinem deci o acţiune a grupului $G = \{1_X, \tau\}$ pe suprafaţa X. Observăm că un punct $x \in X$ (închis) este punct fix pentru τ dacă şi numai dacă ordinul lui x (în grupul abelian $(X, +)$) este 2. Cum caracteristica lui k este diferită de 2, un rezultat elementar de varietăţi abeliene (vezi Mumford [2], §6) arată că există exact 16 asemenea puncte pe X, să zicem $x_1 = 0, x_2, \ldots, x_{16}$. Fie $\pi: \widetilde{X} \to X$ eclatata lui X de centru subschema (redusă) închisă şi discretă $\{x_1, \ldots, x_{16}\}$. Deoarece τ este un automorfism ce lasă punctele x_i pe loc rezultă imediat că există un unic automorfism $\sigma: \widetilde{X} \to \widetilde{X}$ astfel încît $\tau \circ \pi = \pi \circ \sigma$. Atunci $\sigma^2 = 1$ şi deci putem considera varietatea cît $Y = \widetilde{X}/\sigma$ de dimensiune 2. Y poartă numele de suprafaţa Kummer asociată suprafeţei abeliene X. Cîteva proprietăţi importante ale suprafeţei Kummer Y sînt date de:

(10.6) TEOREMĂ. *În ipotezele şi notaţiile de la* (10.5), *Y este o suprafaţă proiectivă şi nesingulară. În plus, Y este o suprafaţă $K3$*

pe care există 16 curbe integre $E_1, \ldots, E_{16}$ ce nu se intersectează două cîte două şi cu proprietăţile $p_a(E_i) = 0$ şi $(E_i^2) = -2$, $(i = 1, \ldots, 16)$, iar dacă H este o secţiune hiperplană pe Y, atunci clasele lui H, $E_1, \ldots, E_{16}$ în Pic (Y) *sînt elemente linear independente.*

Demonstraţie. Fie $\varphi : \tilde{X} \to Y$ morfismul (finit de grad 2) canonic. Cum $\tilde{X}$ este suprafaţă proiectivă şi φ surjectiv, rezultă că Y este varietate completă de dimensiune 2. Dacă arătăm că Y este nesingulară, atunci teorema (1.28) implică faptul că Y este suprafaţă (proiectivă şi nesingulară).

Să arătăm deci că Y este nesingulară. Fie $F_i = \pi^{-1}(x_i)$, $(i = 1, \ldots, 16)$, curbele excepţionale de prima specie ale lui $\tilde{X}$ (relativ la morfismul π). Cum φ este morfism etal în afara lui $\bigcup_{i=1}^{16} F_i$, rămîne să vedem că Y este nesingulară în punctele de forma $\varphi(x)$ cu $x \in \bigcup_{i=1}^{16} F_i$. Cum X este varietate abeliană, translaţia t_{x_i} induce un izomorfism între O_{X,x_i} şi $O_{X,x_1} = O_{X,0}$. Este suficient deci să analizăm punctele lui Y de forma $\varphi(x)$ cu $x \in F_1$. Dacă $T_{X,0}$ (resp. m_0) este spaţiul tangent în 0 la X (resp. idealul maximal al lui $O_{X,0}$) atunci o afirmaţie generală despre grupuri algebrice (vezi Borel [1], 3.2) arată că aplicaţia tangentă $(d\tau)_0 : T_{X,0} \to T_{X,0}$ coincide cu aplicaţia $a \mapsto -a$ a lui $T_{X,0}$. Prin urmare aplicaţia sa duală $\tau^* : m_0/m_0^2 \to m_0/m_0^2$ coincide cu aplicaţia $b \mapsto -b$ a lui $m_0/m_0^2 = T'_{X,0}$. Rezultă că dacă (u, v) este un sistem regulat de parametri al lui X în 0 (adică un sistem minimal de generatori ai lui m_0), atunci $(\tau^*(u), \tau^*(v))$ este de asemenea un sistem regulat de parametri al lui X în 0, ce coincide modulo m_0^2 cu $(-u, -v)$. Or, dacă punem $u' = u - \tau^*(u)$ şi $v' = v - \tau^*(v)$, avem $u' \equiv 2u \pmod{m_0^2}$ şi $v' \equiv 2v \pmod{m_0^2}$. Cum caracteristica lui k este diferită de 2, rezultă că (u', v') este un sistem regulat de parametri al lui X în 0 ce satisface în plus condiţiile:

$$(*) \qquad \tau^*(u') = -u', \quad \tau^*(v') = -v'.$$

Atunci un sistem regulat de parametri pe $\tilde{X}$ într-un punct $x \in F_1$ este de exemplu $u'' = \pi^*(u')$, $v'' = \pi^*(v')/\pi^*(u')$. Din (*) deducem imediat, ţinînd cont de definiţia lui σ:

$$\sigma^*(u'') = -u'', \quad \sigma^*(v'') = v''.$$

De aici rezultă că (u''^2, v'') este un sistem regulat de parametr al lui Y în punctul $\varphi(x)$, şi deci Y este nesingulară.

Fie acum $E_i = \varphi(F_i)$ (cu structura redusă), $i = 1, \ldots, 16$. Este clar că dacă $i \neq j$, avem $E_i \cap E_j = \emptyset$. Pe de altă parte, cum $u'' = 0$ este o ecuaţie locală a lui F_1 în punctul x, atunci $u''^2 = 0$ este o ecuaţie locală a lui E_1 în punctul $\varphi(x)$. Deci E_1 este o curbă nesingulară şi $\varphi^{-1}(E_1) = 2F_1$ (în sens schematic). Ţinînd cont de (1.18) deducem :

$$(\varphi^{-1}(E_1) \cdot \varphi^{-1}(E_1)) = \deg(\varphi) \cdot (F_1^2),$$

de unde rezultă $(E_1^2) = -2$. Cum restricţia lui φ la F_1 este un izomorfism între F_1 şi E_1, avem şi $p_a(E_1) = 0$. Cu remarca făcută la începutul demonstraţiei rezultă că pentru orice $i = 2, \ldots, 16$ avem de asemenea $(E_i^2) = -2$ şi $p_a(E_i) = 0$.

Fie acum $h, e_1, \ldots, e_{16}$ clasele lui $H, E_1, \ldots, E_{16}$ în $\mathrm{Num}(Y) = \mathrm{Pic}(Y)/\mathrm{Pic}^{\tau}(Y)$. Arătăm acum că aceste elemente sînt linear independente. Fie deci $a_0 h + \sum_{i=1}^{16} a_i e_i = 0$, cu $a_0, a_1, \ldots, a_{16}$ numere întregi. Deoarece $(e_i \cdot e_j) = (E_i \cdot E_j) = 0$ dacă $i \neq j$, avem

$$a_0^2 (h \cdot h) = \sum_{i=1}^{16} a_i^2 (e_i \cdot e_i) = -2 \sum_{i=1}^{16} a_i^2 \leqslant 0,$$

şi deci $a_0 = 0$ deoarece $(h \cdot h) = (H^2) > 0$. Acum din $\sum_{i=1}^{16} a_i e_i = 0$ deducem pentru orice $j = 1, \ldots, 16$:

$$0 = \left(e_j \cdot \sum_{i=1}^{16} a_i e_i \right) = -2a_j,$$

şi deci $a_j = 0$. În acest mod am demonstrat că $\rho \geqslant 17$, şi cum $\rho \leqslant b_2$ (inegalitatea Igusa-Severi), rezultă $b_2 \geqslant 17$.

Ca să încheiem demonstraţia teoremei (10.6) va fi suficient să arătăm că $\omega_Y \cong O_Y$, deoarece atunci $c(Y) = 0$. Într-adevăr, singurele suprafeţe minimale (Y este minimală dacă $\omega_Y \cong O_Y$) cu $b_2 \geqslant 17$ care apar în tabelul (10.1) sînt suprafeţele cu $b_2 = 22$, adică Y este suprafaţă $K3$. Dacă Y este suprafaţă $K3$, teorema (10.3) arată că $\mathrm{Pic}(Y) = \mathrm{Num}(Y)$.

Ca să arătăm că $\omega_Y \cong O_Y$, fie ω o formă diferenţială de grad 2 regulată pe X şi nenulă. Deoarece ω este invariantă la translaţii şi are gradul 2, rezultă că $\tau^*(\omega) = \omega$ (anume $\omega = du' \wedge dv'$ abstracţie făcînd de un factor constant nenul şi se ţine cont de relaţiile

(*)). Rezultă atunci că $\pi^*(\omega)$ este o formă diferenţială nenulă de grad 2 şi regulată pe $\widetilde{X}$ ce este invariată de automorfismul σ. Deci $\pi^*(\omega)$ este de forma $\pi^*(\omega) = \varphi^*(\omega')$, cu ω' o formă nenulă de grad 2 raţională pe Y. Este clar că divizorul lui ω' este concentrat în $\bigcup_{i=1}^{16} E_i$. Însă dacă $y = \varphi(x) \in E_1$ avem (ţinînd cont de definiţii şi de notaţiile de mai înainte):

$$\pi^*(\omega) = \mathrm{d}(\pi^*(u')) \wedge \mathrm{d}(\pi^*(v')) = \mathrm{d}u'' \wedge \mathrm{d}(u'' \cdot v'') =$$

$$= u'' \cdot \mathrm{d}u'' \wedge \mathrm{d}v'' = 1/2\mathrm{d}(u''^2) \wedge \mathrm{d}v''.$$

Prin urmare ω' este o formă regulată pe Y cu $\mathrm{div}_Y(\omega') = 0$, ceea ce arată că $\omega_Y \cong O_Y$. Q.E.D.

(10.7) *Observaţii.* a) Dacă Y este suprafaţa Kummer asociată suprafeţei abeliene X, atunci $H^0(Y, \Omega_Y) = 0$, unde $\Omega_Y = \Omega^1_{Y/k}$.

Pentru a justifica afirmaţia de mai sus vom folosi următorul fapt elementar: dacă $f: X' \to X$ este o aplicaţie biraţională de suprafeţe, atunci f induce un izomorfism $f^*: H^0(X, \Omega_X) \to H^0(X', \Omega_{X'})$.

Acceptînd pentru moment acest fapt, presupunem prin absurd că ar exista o 1-formă nenulă $\omega' \in H^0(Y, \Omega_Y)$. Atunci $\varphi^*(\omega)$ este o 1-formă din $H^0(\widetilde{X}, \Omega_{\widetilde{X}})$ invariantă pentru σ, şi cum π induce un izomorfism $\pi^*: H^0(X, \Omega_X) \xrightarrow{\sim} H^0(\widetilde{X}, \Omega_{\widetilde{X}})$, rezultă o 1-formă nenulă $\omega \in H^0(X, \Omega_X)$ invariantă pentru τ. Or, acest lucru este imposibil deoarece $H^0(X, \Omega_X)$ admite ca bază pe $\mathrm{d}u'$ şi $\mathrm{d}v'$ ce satisface proprietatea (*) din demonstraţia teoremei (10.6).

Rămîne de probat că f induce izomorfismul $f^*: H^0(X, \Omega_X) \to$ $\to H^0(X', \Omega_{X'})$. Cum însă f este definită în complementara unui număr finit de puncte şi f realizează un izomorfism între un deschis al lui X' şi un deschis al lui X, deducem imediat un omomorfism injectiv $f^*: H^0(X, \Omega_X) \to H^0(X' - \{z_1, \ldots, z_m\}, \Omega_{X'})$. Ultimul spaţiu vectorial se identifică cu $H^0(X', \Omega_{X'})$, deoarece pentru orice $\omega \in$ $\in H^0(X, \Omega_X)$ polurile lui $f^*(\omega)$ formează un divizor şi deci $f^*(\omega)$ este regulată pe întregul X'. Aplicînd tot ceea ce am spus mai sus aplicaţiei $f^{-1}: X \to X'$, vedem că f^* este un izomorfism. Q.E.D.

b) Suprafaţa Kummer Y asociată varietăţii abeliene X mai poate fi obţinută şi în felul următor: se consideră mai întîi suprafaţa cît X/τ care posedă exact 16 singularităţi corespunzătoare celor 16 puncte fixe ale lui τ. Folosind sistemul regulat de parametri (u', v') al lui X în 0 care satisface condiţia (*) din demonstraţia teoremei

(10.6), se vede imediat că aceste singularităţi sînt puncte raţionale duble ce se desingularizează fiecare printr-o singură transformare pătratică. Atunci este imediat de văzut că Y se identifică cu suprafaţa obţinută din X/τ eclatînd cele 16 puncte raţionale duble.

(10.8) Ţinînd cont de tabelul (10.1) şi de teorema (10.2), următoarea clasă de suprafeţe minimale X cu $c(X) = 0$ de studiat este (ţinînd cont de al doilea număr Betti) clasa formată din toate suprafeţele minimale X cu $\omega_X \approxeq 0$ şi $b_2 = 10$. Atunci $b_1 = 0$ şi $\chi(O_X) = 1$. În acest caz sînt posibile două situaţii:

a) $p_g = 0$, $q = 0$ şi $\Delta = 0$.

b) $p_g = 1$, $q = 1$ şi $\Delta = 2$.

În legătură cu situaţia b) avem următorul rezultat:

(10.9) TEOREMĂ. *Dacă caracteristica lui k este diferită de 2 nu pot exista suprafeţe minimale X cu $c(X) = 0$, $b_2 = 10$ şi $p_g = 1$.*

Demonstraţie. Presupunem că o asemenea suprafaţă există. Atunci din tabelul (10.1) avem $q = \dim H^1(O_X) = 1$ şi $\Delta = 2$. Din teorema (5.1) rezultă că $\Delta = 2$ implică $p = \operatorname{car}(k) > 0$. Pe de altă parte, deoarece $q > 0$, există un 1-cociclu $a = \{a_{ij}\} \in Z^1(\mathcal{U}, O_X)$ care nu este coomolog cu zero, cu $\mathcal{U} = \{U_i\}$ o acoperire deschisă şi finită a lui X cu U_i afini. Urmînd un procedeu bine cunoscut putem să asociem cociclului a un G_a-fibrat $\pi : V \to X$ (G_a fiind grupul aditiv $(k, +)$) în felul următor: Deasupra deschisului U_i avem $\pi^{-1}(U_i) \cong \cong \mathbb{A}^1 \times U_i$, iar lipirea se face în felul următor: dacă $x \in U_i \cap U_j$, atunci perechile $(z_i, x) \in \mathbb{A}^1 \times U_i$ şi $(z_j, x) \in \mathbb{A}^1 \times U_j$ reprezintă acelaşi punct în V dacă şi numai dacă $z_i = a_{ij} + z_j$.

Deoarece $p_g = 1$ şi $\omega_X \approxeq 0$, există o formă ω de grad 2, regulată pe X şi care nu se anulează nicăieri. Atunci familia de forme de grad 3 $\{dz_i \wedge \omega\}_i$ defineşte o unică formă de grad 3 regulată pe V care nu se anulează nicăieri. Rezultă că V este o varietate nesingulară de dimensiune 3 astfel încît $\omega_V \cong O_V$.

Deoarece $\dim H^1(O_X) = 1$ şi $a^p = \{a_{ij}^p\}$ este un 1-cociclu al lui O_X, există un $\lambda \in k$ astfel încît

$$a_{ij}^p = \lambda a_{ij} + b_i - b_j, \quad \text{cu } b_i \in \Gamma(U_i, O_X).$$

Este imediat de văzut că familia de funcţii $\{z_i^p - \lambda z_i - b_i\}_i$, cu $z_i^p - \lambda z_i - b_i \in \Gamma(\mathbb{A}^1 \times U_i, O_V)$, definesc o unică funcţie nenulă $f \in \Gamma(V, O_V)$ (deci $f/\mathbb{A}^1 \times U_i = z_i^p - \lambda z_i - b_i$). Fie X' suprafaţa

din V dată de ecuația $f = 0$. Atunci X' este o suprafață Gorenstein. Dacă $\lambda \neq 0$, atunci restricția $\text{res}\pi = \pi' : X' \to X$ a lui π la X' este un morfism etal, și deci X' este nesingulară în acest caz. Dacă $\lambda = 0$, atunci X' este dată în $\mathbb{A}^1 \times U_i$ de ecuația $z_i^p - b_i = 0$. Cum $b_i^{1/p} \notin \Gamma(U_i, O_X)$(altfel cociclul a ar fi coomolog cu zero), rezultă că X este în acest caz o suprafață redusă și conexă. Deci în ambele cazuri avem $\dim H^0(O_{X'}) = 1$. În plus, deoarece fibratul conormal al lui X' în V este trivial și $\omega_V \cong O_V$, deducem $\omega_{X'} \cong O_{X'}$.

Avem $\chi(O_{X'}) \leqslant \dim H^0(O_{X'}) + \dim H^2(O_{X'}) = \dim H^0(O_{X'}) + \dim H^0(O_{X'}) = 2$.

În fine, după cum este imediat de verificat, avem următoarea filtrare globală a lui $\pi'_* O_{X'}$:

$$0 \subset O_X \subset [O_X \oplus z_i O_X] \subset \ldots \subset [O_X \oplus z_i O_X \oplus \ldots \oplus z_i^{p-1} O_X] = \pi'_* O_{X'},$$

cu $(O_X \oplus z_i O_X \oplus \ldots \oplus z_i^n O_X) / (O_X \oplus z_i O_X \oplus \ldots \oplus z_i^{n-1} O_X) \cong O_X$ pentru orice $n \leqslant p-1$. Ținînd cont de aditivitatea caracteristicii Euler-Poincaré obținem $\chi(X, \pi'_* O_{X'}) = p\chi(O_X)$. Cum π' este un morfism finit $\chi(X, \pi'_* O_{X'}) = \chi(O_{X'})$, și ținînd cont și de inegalitatea obținută mai sus, avem $p\chi(O_X) \leqslant 2$, și deci $p = 2$. Q.E.D.

(10.10) Teorema (10.9) arată că dacă car $(k) \neq 2$, singurele suprafețe minimale cu $c(X) = 0$ și $b_2 = 10$ care rămîn de studiat sînt acelea care aparțin situației a) de mai sus, adică: $c(X) = 0$, $b_2 = 10$, $b_1 = 0$, $\chi(O_X) = 1$, $p_g = 0$, $q = 0$ și $\Delta = 0$. Aceste suprafețe poartă numele de *suprafețe Enriques* (sau uneori *suprafețe Enriques clasice*, pentru a le deosebi de suprafețele Enriques neclasice, adică suprafețele minimale X cu $c(X) = 0$, $b_2 = 10$ și $p_g = 1$, care apar efectiv în caracteristică 2, vezi Bombieri-Mumford [2]). Deoarece ne-am propus în acest paragraf să studiem suprafețele minimale X cu $c(X) = 0$ doar în caracteristică diferită de 2 și 3, teorema (10.9) arată că numai suprafețele Enriques clasice rămîn în discuție.

(10.11) PROPOZIȚIE *Dacă X este o suprafață Enriques, atunci $\omega_X \not\cong O_X$ și $\omega_X^2 \cong O_X$, deci $p_2 = 1$.*

Demonstrație. Deoarece $c(X) = 0$ și $p_g = 0$, avem $\omega_X \not\cong O_X$. Pe de altă parte, avem după teorema Riemann-Roch:

$$\chi(O_X(-K)) = \chi(O_X) = 1.$$

Deci $\dim H^0(O_X(-K)) + \dim H^2(O_X(-K)) \geqslant 1$. După dualitatea Serre $\dim H^2(O_X(-K)) = \dim H^0(O_X(2K))$. Deoarece $-K \sim 0$ și $-K \not\approx 0$, rezultă că $H^0(O_X(-K)) = 0$. Deci $\dim H^0(O_X(2K)) \geqslant 1$, adică $p_2 \geqslant 1$. Cum $c(X) = 0$ avem și $p_2 \leqslant 1$, deci $p_2 = 1$ Însă cum $\omega_X^2 = O_X(2K) \approx 0$ deducem $\omega_X^2 \cong O_X$. Q.E.D.

(10.12) COROLAR. *Dacă X este o suprafață Enriques, ordinul lui ω_X în Pic (X) este egal cu 2.*

(10.13) PROPOZIȚIE. *Dacă X este o suprafață Enriques, atunci* $\mathrm{Pic}^{\tau}(X) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

Demonstrație. Deoarece $p_g = 0$, schema $\underline{\mathrm{Pic}}^{\tau}(X)$ este redusă (cf. teoremei (5.1)). Cum $H^1(O_X)$ este spațiul tangent în origine la grupul algebric $\underline{\mathrm{Pic}}^{\tau}(X)$, rezultă $\underline{\mathrm{Pic}}^{\tau}(X)$ este un grup finit și discret. Fie acum L un O_X-modul inversibil numeric echivalent cu zero. Din teorema Riemann-Roch rezultă $\chi(L) = \chi(O_X) = 1$, și deci $H^0(L) \neq 0$ sau $H^2(L) \neq 0$, sau încă ținînd cont de dualitatea Serre, $H^0(L) \neq 0$ sau $H^0(\omega_X \otimes L^{-1}) \neq 0$. Cum L și $\omega_X \otimes L^{-1}$ sînt numeric echivalente cu zero, rezultă în definitiv $L \cong O_X$ sau $L \cong \omega_X$. Q.E.D.

(10.14) PROPOZIȚIE. *Fie X o suprafață Enriques. Dacă* car$(k) \neq 2$, *există o acoperire etală $\pi : X' \to X$ de grad 2, cu X' suprafață K3 și grupul structural al lui π izomorf cu $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.*

Demonstrație. Fie $(f_{ij}) \in Z^1(\{U_i\}, O_X^*)$ un 1-cociclu ce reprezintă O_X-modulul inversibil ω_X în Pic $(X) = H^1(X, O_X^*)$. Deoarece $\omega_X^2 \cong O_X$, (f_{ij}^2) este o 1-cofrontieră, deci putem scrie:

$$f_{ij}^2 = g_i/g_j \text{ pe } U_i \cap U_j, \quad g_i \in \Gamma\ (U_i, O_X^*).$$

Definim $\pi : X' \to X$ local prin acoperirea conexă și etală (deoarece car$(k) \neq 2$ $z_i^2 = g_i$ pe $U_i \times \mathbb{A}^1$ și lipind după $z_i/z_j = f_{ij}$ pe $(U_i \times \mathbb{A}^1) \cap (U_j \times \mathbb{A}^1)$).

Deoarece π este o acoperire etală și conexă (deci $\omega_{X'} \cong \pi^*(\omega_X)$), X' este o suprafață minimală cu $c(X) = 0$. După propoziția (9.7) $\chi(O_{X'}) = 2\chi(O_X) = 2$. Din tabelul (10.1) vedem că X' este suprafață $K3$. Q.E.D.

(10.15) PROPOZIȚIE. *Fie X o suprafață ce admite o acoperire etală și conexă $\pi : X' \to X$ de grad 2, cu X' suprafață $K3$. Dacă caracteristica lui k este diferită de 2, atunci X este o suprafață Enriques.*

Demonstrație. Deoarece π este morfism etal avem $\omega_{X'} \cong \pi^*(\omega_X)$, și cum $\omega_{X'} \cong O_{X'}$, rezultă atunci $\omega_X \approx 0$, adică $c(X) = 0$. Propoziția (9.7) implică $\chi(O_X) = \dfrac{1}{2}\chi(O_{X'}) = 1$ deoarece X' este suprafață $K3$. Q.E.D.

(10.16) *Exemple de suprafețe Enriques*. Fie în P^5 (car $(k) \neq 2$) suprafața X' dată de trei ecuații de forma

$$f_i(x_0, \ldots, x_5) = Q_i(x_0, x_1, x_2) + Q_i'(x_3, x_4, x_5) = 0, \qquad (i = 1, 2, 3),$$

unde Q_i și Q_i' sînt forme pătratice de trei variabile.

Cu teorema lui Bertini se vede că o astfel de suprafaţă X' generică este nesingulară. Considerăm atunci involuţia:

$$\sigma : P^5 \to P^5$$

dată de $\sigma(x_0, x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (x_0, x_1, x_2, -x_3, -x_4, -x_5)$. Atunci $\sigma(X') = X'$ şi mulţimea punctelor fixe ale lui σ coincide cu reuniunea planelor $x_0 = x_1 = x_2 = 0$ şi $x_3 = x_4 = x_5 = 0$. Dacă conicele $Q_i = 0$ (resp. $Q'_i = 0$) din P^2 $(i = 1, 2, 3)$ nu au nici un punct comun (ceea ce are loc în cazul generic), atunci restricţia $\sigma' = \sigma/X'$ este o involuţie pe X' fără puncte fixe. Putem considera deci suprafaţa (proiectivă şi nesingulară) $X = X'/\sigma'$. Morfismul canonic $\pi : X' \to X$ este atunci o acoperire etală de grad 2 a lui X. După (10.4) X' este o suprafaţă $K3$, iar după (10.15) X este suprafaţă Enriques.

(10.17) TEOREMĂ. *Orice suprafaţă Enriques X este eliptică sau cvasieliptică (în caracteristică $\neq 2, 3$ X este totdeauna eliptică).*

Demonstraţie. După (7.11) este suficient să arătăm că există pe X o curbă integră C cu $p_a(C) = 1$. Într-adevăr, deoarece $K \approxeq 0$, C este atunci o curbă indecompozabilă de tip canonic.

Presupunem prin absurd că o asemenea curbă integră C cu $p_a(C) = 1$ nu există pe X.

Dacă C' este o curbă integră arbitrară pe X, atunci (C'^2) este totdeauna un număr par deoarece $(C'^2) = 2p_a(C') - 2$. Dacă C' este o secţiune hiperplană generică pe X, atunci $(C'^2) > 0$ şi deci $p_a(C') > 1$. Altfel spus, există pe X întotdeauna curbe integre C' (chiar nesingulare) de gen aritmetic > 1.

În continuare vom fixa o curbă integră C pe X cu $p_a(C) > 1$ şi $p_a(C)$ minim.

(10.17.1) LEMĂ. *În notaţiile şi ipotezele de mai sus, fie $|\Delta| \neq \emptyset$ un sistem linear complet cu $(\Delta^2) > 0$. Atunci partea mobilă $|D|$ a lui $|\Delta|$ este ireductibilă (adică conţine cel puţin un membru ireductibil) şi $(D^2) > 0$.*

Demonstraţia lemei (10.17.1). Teorema lui Riemann-Roch arată că $\dim |\Delta| \geqslant 1$.

Presupunem mai întîi că $|\Delta|$ nu are componente fixe şi vom arăta că $|\Delta|$ este ireductibil. Dacă $|\Delta|$ nu are componente fixe, are un număr finit de puncte bază. Fie $f : X \to B$ aplicaţia raţională dedusă din factorizarea Stein a aplicaţiei raţionale $\varphi_{|\Delta|} : X \to B' = \varphi_{|\Delta|}(X) \subset |\Delta|$, cu B normalizata lui B' în corpul funcţiilor raţionale $k(X)$. Deoarece $O_X(\Delta) \cong \varphi^*_{|\Delta|}(O_{B'}(1))$, atunci $O_X(\Delta) \cong f^*(L)$, cu $L = \pi^*(O_{B'}(1))$ amplu pe B (π fiind morfismul finit de normalizare definit pe B cu valori în B').

Dacă $|\Delta|$ ar fi reductibil, atunci $\dim(B) = 1$ (adică $|\Delta|$ ar fi compus cu un fascicul de curbe pe X). În plus, cum fibra generală a lui f este ireductibilă (cf. (7.3)), avem $\deg(L) = n > 1$.

Dacă $g : X' \to X$ este o compunere convenabilă de transformări pătratice astfel încît $f \circ g$ să fie morfism, avem $H^1(O_{X'}) = H^1(O_X) = 0$ iar din şirul exact

$$0 \to H^1(O_B) \to H^1(O_{X'}) = 0$$

deducem că B este izomorfă cu dreapta proiectivă. În aceste condiții avem :

$$\dim |\Delta| = \dim |L| = \deg(L) = n \text{ (deoarece } B = P^1).$$

Pe de altă parte, din teorema Riemann-Roch deducem

$$\dim |\Delta| \geqslant n^2/2 \cdot (F^2) \geqslant n^2,$$

unde F este o fibră integră a lui f. (Într-adevăr, avem $(F^2) \geqslant 2$ deoarece (F^2) este număr par şi $(\Delta^2) > 0$.)

Comparînd relaţiile de mai sus deducem $n \geqslant n^2$, ceea ce contrazice faptul că $n > 1$. Deci $|\Delta|$ este ireductibil dacă $|\Delta|$ nu are componente fixe.

Fie acum $|\Delta|$ arbitrar. Dacă demonstrăm că $(D^2) > 0$, atunci sistemul $|D|$ este ireductibil după cele arătate mai sus. Fie $D = \sum_i n_i E_i$ cu $n_i \geqslant 1$ şi E_i curbe integre ($E_i \neq E_j$ dacă $i \neq j$). Deoarece $|D|$ nu are componente fixe, avem $(D^2) \geqslant 0$. (Anume, fie $D_i \in |D|$ un divizor al cărui suport nu conţine pe E_i; atunci $(D \cdot E_i) = (D_i \cdot E_i) \geqslant 0$, şi deci $(D^2) = \sum_i n_i (D \cdot E_i) \geqslant 0$.)

Dacă $(D^2) = 0$, avem $(D \cdot E_i) = 0$ pentru orice i, deoarece în orice caz $(D \cdot E_i) \geqslant 0$ şi $0 = (D^2) = \sum_i n_i(D \cdot E_i)$. Cum $K \approx 0$, rezultă atunci că D este un divizor de tip canonic, şi după (7.11) concluzia teoremei (10.17) ar fi adevărată, ceea ce noi n-am presupus. Deci $(D^2) > 0$. Q.E.D.

(10.17.2) LEMĂ. *Fie C o curbă integră pe X cu $p_a(C) > 1$ şi $p_a(C)$ minim. Atunci*

$$\dim |C| = \dim |K + C| = p_a(C) - 1 = \frac{1}{2}(C^2).$$

şi sistemul linear $|K + C|$ este ireductibil şi redus.

Demonstrația lemei (10.17.2). Din şirul exact $0 \to O_X(-C) \to O_X \to O_C \to 0$ deducem şirul exact de coomologie :

$$H^0(O_X) \to H^0(O_C) \to H^1(O_X(-C)) \to H^1(O_X) = 0.$$

Cum $H^0(O_X) = H^0(O_C) = k$, rezultă că $H^1(O_X(-C)) = 0$ și deci după dualitatea Serre, $H^1(O_X(K+C)) = 0$. După teorema Riemann-Roch avem:

$$\dim |K+C| = \frac{1}{2}(C^2) + \dim H^1(O_X(K+C)) =$$

$$= \frac{1}{2}(C^2) = p_a(C) - 1,$$

deoarece $\dim H^2(O_X(K+C)) = \dim H^0(O_X(-C)) = 0$.

Fie D partea mobilă a sistemului linear $|K+C|$ și Γ partea sa fixă. Din (10.17.1) deducem că D este ireductibil și $p_a(D) > 1$. Dacă termenul general al lui $|D|$ nu ar fi integru, atunci după teorema lui Bertini ar rezulta că termenul general al lui $|D|$ ar fi de forma p^eF, cu F curbă integră, unde p este exponentul caracteristic al lui k și $e \geqslant 1$. Însă din teorema Riemann-Roch deducem $p_a(D) - 1 \leqslant \dim |D| = \dim |K+C| = p_a(C) - 1$, și deci $1 < p_a(D) \leqslant p_a(C)$. Atunci

$$p_a(F) = \frac{1}{2}(F^2) + 1, \quad p_a(D) = \frac{1}{2}p^{2e}(F^2) + 1.$$

Deci $1 < p_a(F) < p_a(D) \leqslant p_a(C)$, fapt ce contrazice minimalitatea lui $p_a(C)$. Deci termenul general al lui $|D|$ este integru și în plus, $p_a(D) = p_a(C)$, adică $(D^2) = (C^2)$. Însă

$$(C^2) = ((D+\Gamma)^2) = (D^2) + 2(D\cdot\Gamma) + (\Gamma^2),$$

de unde

$$(*) \qquad 2(D\cdot\Gamma) + (\Gamma^2) = 0.$$

Dacă $(\Gamma^2) < 0$, atunci $(D\cdot\Gamma) > 0$ și deci $0 > (D\cdot\Gamma) + (\Gamma^2) = (D+\Gamma\cdot\Gamma) = (C\cdot\Gamma)$, lucru imposibil pentru o curbă C cu $(C^2) > 0$. Rezultă deci $(\Gamma^2) \geqslant 0$.

Dacă $(\Gamma^2) = 0$ și $\Gamma \neq 0$, din teorema Riemann-Roch deducem $\dim |\Gamma + K| \geqslant 0$, deci există $\Gamma' \in |\Gamma + K|$, $\Gamma' \neq \Gamma$. Cum $2\Gamma \sim 2\Gamma'$ (deoarece $2K \sim 0$), rezultă $\dim |2\Gamma| \geqslant 1$. Din această ultimă inegalitate deducem că pentru orice punct $x \in X$ există în $|2\Gamma|$ o curbă ce trece prin punctul x. Fie atunci $D_0 \in |D|$ o curbă integră, $x \in D_0$ un punct al său și $\Delta \in |2\Gamma|$ un divizor ce trece prin punctul x. Cum $(\Gamma^2) = 0$ implică ținînd cont de (*) $(D\cdot\Gamma) = 0$, avem $(D_0\cdot\Delta) = 0$. De aici deducem că D_0 este o componentă a lui Δ și $D_1 = \Delta - D_0 > 0$. Cum $(D^2) > 0$ și $(\Gamma^2) = 0$, avem $(\Delta^2) = (D^2) + 2(D\cdot D_1) + (D_1^2) = 0$, și deci $2(D\cdot D_1) + (D_1^2) < 0$ (deoarece $(D^2) > 0$). Avem $(D\cdot D_1) \geqslant 0$($|D|$ este ireductibil și $(D^2) > 0$) deci $(D\cdot D_1) + (D_1^2) = ((D + D_1)\cdot D_1) < 0$. Aceasta înseamnă $((D +$

$+ D_1) \cdot D) = ((D + D_1)^2) - ((D + D_1) \cdot D_1) = (\Delta^2) - ((D + D_1) \cdot$ $\cdot D_1) = - ((D + D_1) \cdot D_1) > 0$ Altfel spus, $(D \cdot \Gamma) > 0$, contradicţie. Deci situaţia $(\Gamma^2) = 0$ şi $\Gamma \neq 0$ este absurdă.

Acum ţinînd cont că $\dim |\Gamma| \geqslant \frac{1}{2} (\Gamma^2)$ şi $\dim |\Gamma| = 0$, rezultă întotdeauna $(\Gamma^2) \leqslant 0$. Am utilizat aici următoarea observaţie simplă: dacă $|E| \neq \emptyset$ este un sistem linear complet şi F partea sa fixă, atunci $\dim |F| = 0$. Într-adevăr, notînd prin $|E'|$ partea mobilă a sistemului $|E|$, dacă prin absurd $\dim |F| \geqslant 1$, ar exista un $F' \in$ $\in |F|$, $F' \neq F$. Atunci pentru orice $G \in |E'|$ avem $G + F' \geqslant F$. Fie H o componentă ce apare în F cu coeficient strict mai mare decît coeficientul cu care apare ea în F'. Atunci inegalitatea de mai sus arată că $G \geqslant H$. Rezultă atunci că $|E'|$ are pe H drept componentă fixă, lucru imposibil deoarece $|E'|$ este partea mobilă a lui $|E|$.

În concluzie $\Gamma = 0$, adică sistemul linear complet $|C + K|$ nu are componente fixe, iar termenul său general este ireductibil şi redus. Acum exact ca la începutul demonstraţiei rezultă că $\dim H^1(O_X(C)) = \dim H^1(O_X(K + C + K)) = 0$. Teorema Riemann-Roch implică

$$\dim |C| \, \| \, \frac{1}{2} (C^2) + \dim H^1(O_X(C)) = \frac{1}{2} (C^2) \qquad \text{Q.E.D.}$$

(10.17.3) COROLAR. *În notaţiile şi ipotezele lui* (10.17.2) *avem*

$$\dim |2C| = 2(C^2) = 4p_a(C) - 4.$$

Demonstraţia corolarului (10.17.3). Teorema Riemann-Roch implică $\dim |2C| = 2(C^2) + \dim H^1(O_X(2C))$. Rămîne deci de arătat că $H^1(O_X(2C)) = 0$, sau după dualitatea Serre, $H^1(O_X(K - 2C)) = 0$. Şirul exact

$$0 \to O_X(K - 2C) \to O_X(K - C) \to F \to 0,$$

cu F inversibil pe C şi $\deg(F) = -(C^2) < 0$, induce şirul exact de coomologie:

$$0 = H^0(F) \to H^1(O_X(K - 2C)) \to H^1(O_X(K - C)).$$

Însă $\dim H^1(O_X(K - C)) = \dim H^1(O_X(C)) = 0$ conform lemei (10.17.2) Q.E.D.

(10.17.4) Fie acum C curba integră pe X cu $g = p_a(C) > 1$ minim. Din (10.17.2) şi (10.17.3) rezultă

$$\dim |C| = g - 1,$$
$$\dim |2C| = 4g - 4.$$

Fie $V_1 = \{\Delta \in |2C| / \exists\, C_1, C_2 \in |C|$ astfel încît $\Delta = C_1 + C_2\}$ și $V_2 = \{\Delta \in |2C| = |2C + 2K| / \exists\, C_1', C_2' \in |C + K|$ astfel încît $\Delta = C_1' + C_2'\}$.

(10.17.5) LEMĂ. *Mulțimile V_1 și V_2 sînt submulțimi algebrice închise în $|2C| = P^{4g-4}$ fiecare de dimensiune $2g - 2$.*

Demonstrația lemei (10.17.5). Fie C_1 și $C_2 \in |C|$ două curbe integre ($C_1 \neq C_2$) linear echivalente cu C, și fie $\alpha_1 \in k(X)$ o funcție rațională astfel încît $\operatorname{div}_X(\alpha_1) = C_2 - C_1$. Ideea de demonstrație este de a alege baze vectoriale convenabile în $H(O_X(C))$ și $H^0(O_X(2C))$ astfel încît algebricitatea submulțimilor V_1 și V_2 ale spațiului proiectiv $P(H^0(O_X(2C)))$ (precum și faptul că $\dim(V_1) = \dim(V_2) = 2g - 2$) să devină evidente.

Fie $L(C_1) = \{f \in k(X)^* \mid \operatorname{div}_X(f) + C_1 \geqslant 0\} \cup \{0\}$. Atunci au loc izomorfismele $H^0(O_X(C)) \cong L(C_1) \cong L(C_2)$, de unde izomorfismele $|C| = P(H^0(O_X(C)) \cong P(L(C_1)) \cong P(L(C_2))$. De exemplu izomorfismul $P(L(C_1)) \cong P(H^0(O_X(C)) = |C|$ se realizează în felul următor: dacă $f \in L(C_1)$, $f \neq 0$, atunci $\hat{f} \in P(L(C_1)) \mapsto \operatorname{div}_X(f) + C_1 \in |C|$.

Fie acum $\alpha_0 = 1, \alpha_1, \ldots, \alpha_{g-1} \in L(C_1)$ o bază a k-spațiului vectorial $L(C_1)$. Atunci este clar că funcțiile $\beta_0 = 1/\alpha_1$, $\beta_1 = 1$, $\beta_2 = \alpha_2/\alpha_1, \ldots, \beta_{g-1} = \alpha_{g-1}/\alpha_1$ reprezintă o bază vectorială a lui $L(C_2)$. În plus, dacă $\Delta \in |C|$, atunci coordonatele omogene ale lui Δ în baza $\alpha_0, \ldots, \alpha_{g-1}$ coincid cu coordonatele omogene ale lui Δ în baza $\beta_0, \ldots, \beta_{g-1}$. Deoarece $L(C_1)$ și $L(C_2)$ sînt subspații vectoriale ale lui $L(C_1 + C_2)$, atunci α_i și β_j aparțin lui $L(C_1 + C_2)$. Mai mult, elementele $\gamma_0 = \alpha_0$, $\gamma_1 = \alpha_1, \ldots, \gamma_{g-1} = \alpha_{g-1}$, $\gamma_g = \beta_0$, $\gamma_{g+1} = \beta_2, \ldots, \gamma_{2g-2} = \beta_{g-1}$ sînt linear independente peste k. Într-adevăr, dacă

$$\sum_{i=0}^{g-1} \lambda_i \alpha_i + \sum_{\substack{j=0\\ j\neq 1}}^{g-1} \lambda_j' \beta_j = 0, \qquad \lambda_i, \lambda_j' \in k,$$

este o combinație lineară egală cu zero de elementele $\gamma_0, \gamma_1, \ldots, \gamma_{2g-2}$, atunci avem:

$$\alpha_1 \left(\sum_{i=0}^{g-1} \lambda_i \alpha_i \right) + \sum_{\substack{j=0\\ j\neq 1}}^{g-1} \lambda_j' \alpha_j = 0$$

Notînd cu $\alpha = \sum_{i=0}^{g-1} \lambda_i \alpha_i$ și cu $\beta = - \sum_{j \neq 1} \lambda_j' \alpha_j$, avem $\alpha_1 \cdot \alpha = \beta$, de unde $\operatorname{div}_X(\alpha_1) + \operatorname{div}_X(\alpha) = \operatorname{div}_X(\beta)$, sau încă $\operatorname{div}_X(\alpha) +$

$+ C_2 = \operatorname{div}_X(\beta) + C_1 \geqslant 0$ deoarece $\beta \in L(C_1)$. Deci $\operatorname{div}_X(\alpha) + C_2 \geqslant 0$ și cum $\alpha \in L(C_1)$, $\operatorname{div}_X(\alpha) + C_1 \geqslant 0$. Din modul în care am ales pe C_1 și C_2 rezultă că $\operatorname{div}_X(\alpha) \geqslant 0$, și deci $\alpha = \lambda_0 \in k$. Însă atunci obținem

$$\lambda_0 \alpha_1 + \lambda_0' + \lambda_2' \alpha_2 + \ldots + \lambda_{g-1}' \alpha_{g-1} = 0$$

de unde $\lambda_0 = \lambda_0' = \lambda_2' = \ldots = \lambda_{g-1}' = 0$ și afirmația că $\gamma_0, \gamma_1, \ldots, \gamma_{2g-2}$ sînt linear independente este dovedită.

Completăm acum sistemul $\gamma_0, \gamma_1, \ldots, \gamma_{2g-2} \in L(C_1 + C_2) \cong L(2C)$ la o bază $\gamma_0, \ldots, \gamma_{2g-2}, \gamma_{2g-1}, \ldots, \gamma_{4g-4}$. Vom identifica $|2C|$ cu P^{4g-4} via această bază. Atunci un punct $(\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_{4g-4}) \in P^{4g-4}$ aparține mulțimii V_1 dacă și numai dacă există $(\mu_0, \ldots, \mu_{g-1})$, $(\nu_0, \ldots, \nu_{g-1}) \in P^{g-1}$ astfel încît

$$\sum_{i=0}^{4g-4} \lambda_i \gamma_i = \rho \left(\sum_{j=0}^{g-1} \mu_j \alpha_j \right) \cdot \left(\sum_{l=0}^{g-1} \nu_l \beta_l \right),$$

sau încă

$$(*) \qquad \sum_{i=0}^{4g-4} \lambda_i \gamma_i = \rho \sum_{j,l=0}^{g-1} \mu_j \nu_l \cdot \alpha_j \beta_l, \qquad \rho \in k^*$$

Însă $\alpha_j \beta_l = \alpha_l \beta_j = \alpha_l \cdot \alpha_j / \alpha_1 \in L(C_1 + C_2)$, deci

$$(**) \qquad \alpha_j \beta_l = \sum_{i=0}^{4g-4} a_i^{jl} \gamma_i, \quad a_i^{jl} \in k \quad (a_i^{jl} = a_i^{lj}).$$

Substituind (**) în (*) obținem

$$\lambda_i = \rho \cdot \sum_{j,l=0}^{g-1} a_i^{jl} \mu_j \nu_l \left(= \rho \sum_{j,l=0}^{g-1} a_i^{lj} \mu_j \nu_l \right), \qquad i = 0, \ldots, 4g^{-4}.$$

Aceste relații reprezintă ecuațiile parametrice ale mulțimii V_1, de unde se vede că V_1 este subvarietate algebrică în P^{4g-4} de dimensiune $2g - 2$. Absolut la fel se demonstrează afirmația în legătură cu mulțimea V_2. Q.E.D.

(10.17.6) *Continuarea demonstrației teoremei* (10.17). Din lema (10.17.5) rezultă că $V_1 \cap V_2 \neq \emptyset$, deci că există un divizor $\Delta \in |2C|$ astfel încît să avem :

$$\Delta = C_1 + C_2, \quad C_1, C_2 \in |C|,$$

$$\Delta = C_1' + C_2', \quad C_1', C_2' \in |C + K|.$$

Fie Γ partea comună a curbelor C_1, C_2, C'_1, și C'_2. Considerăm atunci sistemul de ecuații în D_1, D_2, D_3 și D_4:

$$(*)\qquad \begin{cases} D_1 + D_2 = C_1 - \Gamma, & D_1 + D_3 = C'_1 - \Gamma, \\ D_3 + D_4 = C_2 - \Gamma, & D_2 + D_4 = C'_2 - \Gamma. \end{cases}$$

Dacă punem $C_1 - \Gamma = \sum_i a_i E_i$, $C_2 - \Gamma = \sum_i b_i E_i$, $C'_1 - \Gamma = \sum_i c_i E_i$, $C'_2 - \Gamma = \sum_i d_i E_i$, cu E_i curbe integre (distincte două cîte două), a_i, b_i, c_i, d_i întregi nenegativi astfel încît $a_i + b_i + c_i + d_i > 0$ și $a_i + b_i = c_i + d_i$ pentru orice i, și de asemenea $D_1 = \sum_i x_i E_i$, $D_2 = \sum_i y_i E_i$, $D_3 = \sum_i z_i E_i$ și $D_4 = \sum_i u_i E_i$, atunci sistemul de mai sus devine:

$$(**)\qquad \begin{cases} x_i + y_i = a_i, & x_i + z_i = c_i, \\ z_i + u_i = b_i, & y_i + u_i = d_i. \end{cases}$$

Deoarece componenta comună a membrilor din dreapta ai sistemului (*) este egală cu zero, avem și condiția $a_i b_i c_i d_i = 0$ pentru orice i. După cum este ușor de arătat, din această condiție rezultă existența unei soluții a sistemului (**) ce satisface condițiile $x_i u_i = y_i z_i = 0$.

Obținem deci o soluție (D_1, D_2, D_3, D_4) a sistemului (*) ce satisface condițiile:

a) $D_i \geqslant 0$.

b) Divizorii D_1 și D_4 (resp. D_2 și D_3) nu au componente comune.

În plus avem $D_1 + D_3 \sim D_1 + D_2 + K$; $D_2 + D_4 \sim D_2 + D_1 + K$. Sau încă $D_3 \sim D_2 + K$ și $D_4 \sim D_1 + K$.

De aici rezultă că $D_i > 0$ pentru orice $i = 1, 2, 3, 4$ și în plus, $(D_i^2) \geqslant 0$ pentru orice $i = 1, 2, 3, 4$. (De exemplu $(D_2^2) = (D_3 \cdot D_2) \geqslant 0$ deoarece D_3 și D_2 nu au componente comune.

Dacă pentru un i am avea $(D_i^2) = 0$, atunci punînd $D_i = \sum_j n_{ij} F_{ij}$ ($n_{ij} \geqslant 1$ și F_{ij} curbe integre distincte două cîte două), atunci $(D_i \cdot F_{ij}) \geqslant 0$. (De exemplu pentru $i = 2$: atunci dacă F_{2j} este componentă a lui D_2, F_{2j} nu mai poate fi componentă a lui D_3, și deci $(D_2 \cdot F_{2j}) = (D_3 \cdot F_{2j}) \geqslant 0$.) Însă relația

$$0 = (D_i^2) = \sum_j n_{ij} (D_i \cdot F_{ij})$$

implică $(D_i \cdot F_{ij}) = 0$ pentru orice j. Cum $K \approxeq 0$, aceasta înseamnă că D_i este un divizor de tip canonic, şi deci după (7.11), X este eliptică sau cvasieliptică, ceea ce noi am exclus.

Deci $(D_i^2) > 0$ pentru orice $i = 1, 2, 3, 4$. Fie atunci $|C'|$ partea mobilă a sistemului linear complet $|D_1|$. Lema (10.17.1) arată că $|C'|$ este ireductibil şi $(C'^2) > 0$. Din teorema Riemann-Roch deducem $\dim |D_2| \geqslant 1/2\,(D_2^2) \geqslant 1$, şi deci D_2 nu poate fi partea fixă a sistemului linear complet $|D_1 + D_2|$ (vezi observaţia de la finalul demonstraţiei lui (10.17.2)), de unde deducem $\dim |D_1| < \dim|D_1 + D_2|$. Prin urmare obţinem: $\dim |C'| = \dim |D_1| < \dim |D_1 + D_2| = \dim |C_1 - \Gamma| \leqslant \dim |C_1| = \dim |C|$.

Din lema (10.17.2) avem $\dim |C| = 1/2\,(C^2)$, iar $\dim |C'| \geqslant 1/2(C'^2)$. Ţinînd cont de inegalităţile de mai sus, am obţinut $(C'^2) < (C^2)$, sau încă $1 < p_a(C') < p_a(C)$, cu C' curbă ireductibilă. Însă dacă $C'' = C'_{\text{red}}$, atunci $p_a(C'') > 1$ (deoarece $(C''^2) > 0$ rezultă din $(C'^2) > 0$) şi $p_a(C'') \leqslant p_a(C') < p_a(C)$, fapt ce contrazice modul de alegere al lui C. Teorema (10.17) este astfel complet demonstrată. Q.E.D.

(10.18) Trecem acum să studiem suprafeţele minimale X cu $c(X) = 0$ şi $b_2 = 6$. Din tabelul (10.1) rezultă atunci că avem: $b_1 = 4$, $\chi(O_X) = 0$, $q = 2$, $p_g = 1$ şi $\Delta = 0$. Observăm mai întîi că orice varietate abeliană X de dimensiune 2 are invarianţii menţionaţi mai sus, adică $c(X) = 0$, $b_2 = 6$ etc.

Într-adevăr, dacă X este o varietate abeliană de dimensiune oarecare (să zicem $d \geqslant 1$), atunci avem (vezi Mumford [2], § 13):

$$\dim H^p(X, O_X) = \binom{d}{p}.$$

Deci dacă X este suprafaţă abeliană, avem mai întîi $K \approxeq 0$ şi apoi $q = 2$ şi $p_g = 1$. Pe de altă parte, deoarece o varietate abeliană satisface egalitatea $\dim \underline{\mathrm{Pic}}^0(X) = \dim(X)$, avem, conform teoremei (5.1), $\Delta = 0$. Din formula lui Noether deducem atunci $b_2 = 6$.

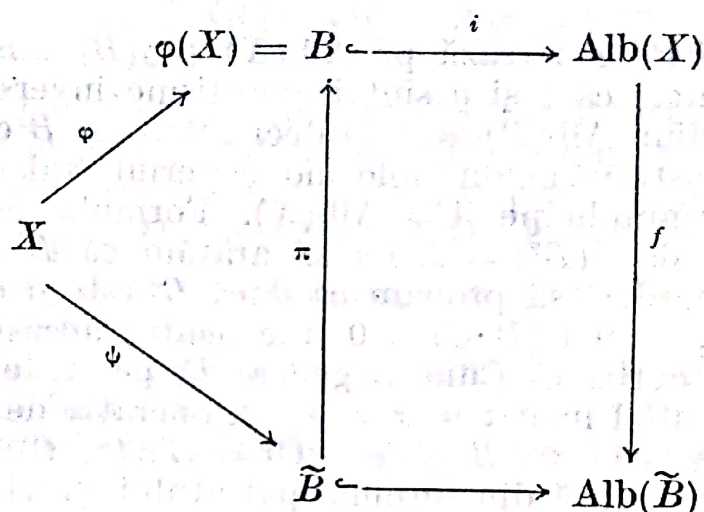
Vom demonstra acum că suprafeţele abeliene X sînt singurele suprafeţe minimale cu $c(X) = 0$ şi $b_2 = 6$.

(10.19) TEOREMĂ. *Orice suprafaţă minimală X cu $c(X) = 0$ şi $b_2 = 6$ este suprafaţă abeliană.*

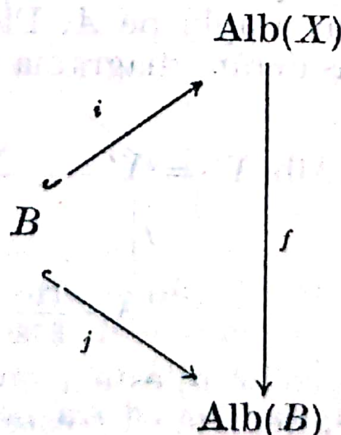
Demonstraţie. Ne vom mărgini (pentru a nu complica prea mult lucrurile) la a da un argument valabil doar în caracteristică zero. Rezultatul este însă valabil în orice caracteristică (vezi Bombieri-Mumford [1]).

Fie $\varphi : X \to \mathrm{Alb}(X)$ morfismul Albanese. Deoarece $q = 2$ şi $\Delta = 0$, atunci dim $\mathrm{Alb}(X) = 2$ (cf. (5.3)). Dacă nu vom specifica anume o mare parte din demonstraţie rămîne valabilă şi în caracteristică pozitivă.

Arătăm mai întîi că morfismul φ este surjectiv. Dacă prin absurd φ nu ar fi surjectiv, atunci $\varphi(X) = B$ ar fi o curbă, deoarece $\varphi(X)$ nu poate fi punct ($\varphi(X)$ nu ar mai genera pe $\mathrm{Alb}(X)$). Dacă B este curbă, vom arăta că B este curbă nesingulară de gen 2. În acest scop, fie $\pi : \widetilde{B} \to B$ normalizata curbei B (cu π morfism finit şi biraţional). Din proprietatea de universalitate a lui $\mathrm{Alb}(X)$ rezultă că există un unic morfism $f : \mathrm{Alb}(X) \to \mathrm{Alb}(\widetilde{B}) = \mathrm{Jac}(\widetilde{B})$ (jacobiana curbei $\widetilde{B}$) astfel încît următoarea diagramă să fie comutativă:



Fie $\pi' = f/B : B \to \widetilde{B}$. Rezultă atunci imediat că $\pi' \circ \pi = 1_{\widetilde{B}}$ şi $\pi \circ \pi' = 1_B$, şi deci π este izomorfism. Altfel spus, curba B este nesingulară. Deoarece $B = \widetilde{B}$, diagrama de mai sus se reduce la diagrama comutativă:



Din proprietatea de universalitate a varietății $\mathrm{Alb}(X)$ obținem un unic morfism de varietăți abeliene $g: \mathrm{Alb}(B) \to \mathrm{Alb}(X)$ care face comutativă diagrama :

$$\begin{array}{ccc} & & \mathrm{Alb}(X) \\ & \overset{i}{\nearrow} & \uparrow \\ B & & g \\ & \underset{j}{\searrow} & \\ & & \mathrm{Alb}(B) \end{array}$$

Cum $i(B)$ generează pe $\mathrm{Alb}(X)$ și $j(B)$ generează pe $\mathrm{Alb}(B)$, rezultă imediat că f și g sînt izomorfisme inverse unul altuia. În particular, $\dim \mathrm{Alb}(B) = 2$, și deci genul lui B este 2.

Demonstrăm acum, folosind criteriul Nakai-Moishezon, că B este divizor amplu pe $A = \mathrm{Alb}(X)$. Formula genului și faptul că $\omega_A \cong O_A$ ne dau $(B^2) = 2$. Ca să arătăm că B este divizor amplu pe A rămîne deci să probăm că dacă C este o curbă integră arbitrară pe A, atunci $(B \cdot C) > 0$. Fie pentru aceasta $z \in C$ un punct arbitrar pe curba C. Cum B generează pe A, există două puncte x și $y \in B$ astfel încît $z = x - y$ (în operația de grup a lui A). De aici rezultă că $x \in B \cap (y + C) = B \cap t^*_{-y}(C)$ (t_{-y} fiind translația $v \mapsto -y + v$). Însă din formula pătratului (vezi Mumford [2], § 6) rezultă că $t^*_{-y}(C)$ este algebric echivalent cu C, și deci :

$$(B \cdot C) = (B \cdot t_{-y}(C)) > 0.$$

deoarece $B \cap t_{-y}(C) \neq \emptyset$ și $(B^2) > 0$.

Deci B este divizor amplu pe A. Fie acum n un întreg prim cu caracteristica lui k. Considerăm diagrama carteziană :

$$\begin{array}{ccc} X \times_{\mathrm{Alb}(X)} \mathrm{Alb}(X) = X' & \xrightarrow{\ \psi\ } & \mathrm{Alb}(X) \\ {\scriptstyle f}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle n} \\ X & \longrightarrow & \mathrm{Alb}(X) \end{array}$$

Cum n (multiplicarea cu n) este atunci morfism etal (vezi Mumford [2], § 6) de grad n^4, rezultă că f este de asemenea morfism etal,

și deci X' este suprafață nesingulară. Avem $\psi(X') = n^{-1}(\psi(X)) = n^{-1}(B)$. Rezultă că restricția lui n la $\psi(X')$ este un morfism etal de grad n^4. Deoarece n este finit, B amplu pe A și $\psi(X') = n^{-1}(B)$, rezultă că $\psi(X')$ este un divizor amplu pe A. Cum A este o suprafață proiectivă și nesingulară, teorema Enriques-Severi-Zariski-Serre implică conexitatea curbei $\psi(X')$. Deci obținem acoperirea etală și conexă de grad n^4 $\psi(X') \to B$. Cum genul lui B este 2, rezultă că genul curbei nesingulare $\psi(X')$ este > 2. Fie X'_0 o componentă conexă a lui X' astfel încît $\psi(X'_0) = \psi(X')$. Avem diagrama comutativă:

$$\begin{array}{ccc} X'_0 & \xrightarrow{u} & \mathrm{Alb}(X'_0) \\ {\scriptstyle\psi}\downarrow & & \downarrow \\ \psi(X') & \xrightarrow{v} & \mathrm{Alb}(\psi(X')) = \mathrm{Jac}(\psi(X')) \end{array}$$

Cum $v(\psi(X'_0))$ generează pe Alb $(\psi(X'))$, rezultă că morfismul f este surjectiv. Deci $q(X'_0) \geqslant \dim \mathrm{Alb}\,(X'_0) \geqslant \dim \mathrm{Alb}\,(\psi(X')) =$ = genul lui $\psi(X') > 2$. Am obținut deci o suprafață (proiectivă și nesingulară) X'_0 cu $\omega_{X'_0} \cong O_{X'_0}$ și $q(X'_0) > 2$. Or, în tabelul (10.1) asemenea suprafețe nu figurează. Contradicția a provenit din ipoteza că morfismul φ nu este surjectiv.

Deci $\varphi : X \to A = \mathrm{Alb}(X)$ este un morfism surjectiv de suprafețe, deci de grad finit. Mai mult, φ este chiar un morfism finit. Pentru a dovedi acest lucru, considerăm factorizarea Stein a lui φ:

$$\begin{array}{ccc} & & Y \\ & \overset{\varphi'}{\nearrow} & \\ X & & \downarrow{\scriptstyle\varphi''} \\ & \underset{\varphi}{\searrow} & \\ & & A \end{array}$$

cu φ'' morfism finit și φ' morfism birațional. Dacă φ nu ar fi finit, φ' nu ar fi izomorfism. Există deci o curbă integră E pe X astfel încît $\varphi'(E)$ să fie un punct pe Y. După (2.7) $(E^2) < 0$, iar formula genului și faptul că X este model minimal implică $p_a(E) = 0$ și

$(E^2) = -2$. Prin urmare Y este o suprafață normală care are drept singularități cel mult puncte raționale duble (în număr finit). Din teorema (3.15) rezultă că fasciculul dualizant ω_Y este inversibil și $\omega_X \cong \varphi'^*(\omega_Y)$. Cum $\omega_X \cong O_X$ rezultă de asemenea $\omega_Y \cong O_Y$.

Considerăm atunci morfismul finit φ''. Scoțînd eventual un număr de puncte ale lui A (anume imaginile prin φ'' ale tuturor punctelor raționale duble ale lui Y), obținem un morfism finit și plat $\tilde{\varphi} : Y' \to A'$ de suprafețe nesingulare astfel încît $\omega_{A'}$ și $\omega_{Y'}$ sînt triviale. Deoarece ne găsim în caracteristică zero, $\tilde{\varphi}$ este un morfism separabil. Fie ω o formă diferențială de grad 2 nenulă și regulată pe A'; atunci $\tilde{\varphi}^*(\omega)$ este o formă nenulă și regulată pe Y'. Cum $\tilde{\varphi}^*(\omega)$ se anulează exact în punctele lui Y' în care $\tilde{\varphi}$ nu este morfism etal, și cum $\omega_{Y'} \cong O_{Y'}$, rezultă că $\tilde{\varphi}$ este etal. Folosind teorema de puritate a locului de ramificare (vezi Altman-Kleiman [1], sau Grothendieck [6]) deducem că φ'' este etal peste tot, și cum A este nesingulară, atunci Y este nesingulară. Deci φ' este un izomorfism, sau încă morfismul Albanese $\varphi : X \to \mathrm{Alb}(X)$ este morfism etal. Însă atunci un rezultat al lui Lang-Serre (vezi Mumford [2], § 18) afirmă că X are o structură de varietate abeliană astfel încît φ să devină o isogenie. Q.E.D.

(10.20) Ultima clasă de suprafețe minimale X cu $c(X) = 0$ o formează suprafețele cu $b_2 = 2$. Din tabelul (10.1) deducem atunci că $b_1 = 2$ și $\chi(O_X) = 0$. În acest caz sînt posibile două situații:

a) $p_g = 0$, $q = 1$ și $\Delta = 0$, sau

b) $p_g = 1$, $q = 2$ și $\Delta = 2$.

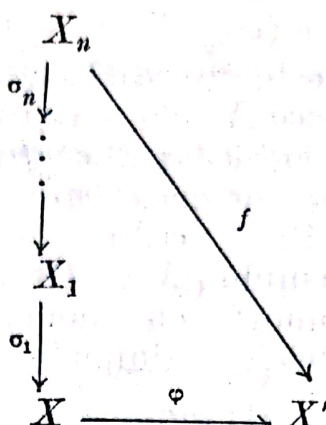
Această clasă de suprafețe a fost parțial studiată în § 8 (cf. (8.6) și (8.9)), unde am văzut că există două tipuri de astfel de suprafețe: hipereliptice sau cvasihipereliptice. Suprafețele cvasihipereliptice pot apărea numai în car 2 sau 3. Vom analiza acum structura suprafețelor hipereliptice în car$\neq 2$ și 3.

Fie deci X o suprafață hipereliptică $(\mathrm{car}(k) \neq 2, 3)$. După teorema (8.6) morfismul Albanese $f : X \to \mathrm{Alb}(X) = B$ are următoarele proprietăți: B este curbă eliptică și orice fibră a lui f este o curbă eliptică nesingulară. De asemenea, teorema (8.9) arată că există o altă fibrare eliptică $g : X \to P^1$ care este transversală la fibrarea f. Comparînd aceste două fibrări eliptice, vom deduce structura suprafețelor hipereliptice.

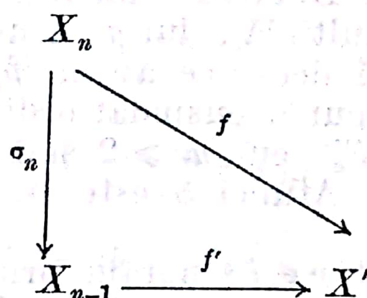
Înainte de aceasta însă avem nevoie de următorul rezultat care prezintă interes și în sine.

(10.21) Teoremă. *Fie X și X' două suprafețe minimale cu $c(X) \geqslant 0$ și $c(X') \geqslant 0$, și fie $\varphi : X \to X'$ o aplicație birațională. Atunci φ este un izomorfism.*

Demonstrație. Avem de arătat că φ și φ^{-1} sînt morfisme. Să arătăm de exemplu că φ este morfism. Fie



n eclatări de puncte (cu structura redusă) astfel încît $f = \varphi \circ \sigma_1 \circ \ldots \circ \sigma_n$ să fie morfism. Presupunem că n este numărul minim de eclatări $\sigma_1, \ldots, \sigma_n$ cu proprietatea că $\varphi \circ \sigma_1 \circ \ldots \circ \sigma_n$ devine morfism. Avem de arătat că $n = 0$. Dacă prin absurd $n > 0$, fie E curba excepțională din X_n pentru σ_n. Atunci $f(E) = F$ este o curbă pe X', deoarece dacă $f(E)$ ar fi un punct, atunci f s-ar factoriza printr-un morfism f' :



și astfel s-ar contrazice minimalitatea lui n.

Afirmăm acum că $(\omega_{X'} \cdot F) < 0$. Dacă afirmația este dovedită, atunci rezultă că X' ar aparține clasei a) ((cf. 8.2)), și atunci după observația (8.3) a) am avea $c(X) = -1$. Absurditatea provine din ipoteza că φ nu este morfism.

Rămîne deci să demonstrăm afirmația. Demonstrația se face prin inducție după numărul eclatărilor ce intră în descompunerea lui f. Fie mai întîi $\sigma : U \to V$ o eclatare a suprafeței V de centru punctul $v \in V$, și fie D curba excepțională a lui σ. Dacă E' este o curbă integră pe U și $E'' = \sigma(E')$ este tot o curbă (pe V), atunci avem $(\omega_U \cdot E') = (\sigma^*(\omega_V) \otimes O_U(D) \cdot \sigma^*(E'')) - (\sigma^*(\omega_V) \otimes O_U(D) \cdot mD)$,

unde $m = (E' \cdot D)$. Deci $(\omega_U \cdot E') = (\sigma^*(\omega_V) \cdot \sigma^*(E'')) - m(D^2) = (\omega_V \cdot \cdot E'') + m \geqslant (\omega_V \cdot E'')$.

Însă observăm că deoarece E este o curbă excepţională de prima specie pe X_n avem $(\omega_{X_n} \cdot E) = -1$, de unde prin inducţie $(\omega_{X'} \cdot F) < 0$ şi afirmaţia este dovedită. Q.E.D.

(10.22) COROLAR. *Dacă X este o suprafaţă cu $c(X) \geqslant 0$, atunci clasa de izomorfism biraţional a lui X conţine (abstracţie făcînd de un izomorfism biregulat) un singur model minimal.*

(10.23) *Observaţie.* Dacă $c(X) = -1$ afirmaţia corolarului (10.22) este falsă. De exemplu $X = P^2$ este model minimal biraţional izomorf (dar neizomorf) cu modelul minimal $P^1 \times P^1$. În § 12 vom clasifica modelele minimale ale suprafeţelor X cu $c(X) = -1$.

(10.24) Revenim acum la analiza suprafeţelor hipereliptice (în caracteristică diferită de 2 şi 3), precum şi la notaţiile de la (10.20). Fie $F_b = f^{-1}(b)$ cu $b \in B$ şi $F'_c = g^{-1}(c)$ cu $c \in P^1$. Deoarece $b_2 = 2$ şi $b_2 \geqslant \rho$, lema (8.7) implică ireductibilitatea tuturor fibrelor lui g. (Acest fapt se poate deduce şi direct în felul următor: dacă ar exista prin absurd o fibră F'_c de componente ireductibile $E_1, \ldots, E_n$ cu $n \geqslant 2$, atunci din (2.6) rezultă $(E_1^2) < 0$. Cum $\omega_X \approx 0$, formula genului implică $p_a(E_1) = 0$ şi $(E_1^2) = -2$. Cum E_1 nu poate fi conţinută în niciuna din fibrele lui f, rezultă că E_1 domină curba eliptică B, lucru evident absurd.)

Dacă F'_c este fibră multiplă a lui g, atunci $F''_c = (F'_c)_{\text{red}}$ este în orice caz curbă eliptică deoarece avem $p_a(F''_c) = 1$ şi F''_c nu poate fi raţională (cu un punct cuspidal ordinar) deoarece F''_c domină pe B. Deci $F'_c = mF''_c$ cu $m \geqslant 2$ şi F''_c curbă eliptică. Fie $S = \{c \in P^1 / F'_c \text{ multiplă}\}$. Atunci S este o submulţime finită a lui P^1.

Pentru fiecare punct $c \in P^1$ notăm prin $f_c = \text{res}(f) : F'_c \to B$ restricţia lui f la F'_c. Dacă $c \in P^1 - S$, atunci f_c este un morfism etal (F'_c şi B sînt curbe eliptice şi se ţine cont de formula lui Hurwitz), şi f_c induce omomorfismul de grupuri algebrice:

$$f_c : \underline{\text{Pic}}^0(B) \to \underline{\text{Pic}}^0(F'_c)$$

Însă pe o curbă eliptică B asocierea $b \mapsto$ clasa lui $O_B(b - b_0)$ în $\underline{\text{Pic}}^0(B)$ defineşte un izomorfism de grupuri algebrice între B şi $\underline{\text{Pic}}^0(B)$, dacă ne fixăm un punct bază $b_0 \in B$ (care este originea lui B). Observăm acum că $\underline{\text{Pic}}^0(F'_c)$ acţionează pe F'_c (cu $c \in P^1 - S$) de o manieră canonică prin translaţii: dacă L este un $O_{F'_c}$-modul inversibil de grad zero, atunci L aplică punctul $x \in F'_c$ în unicul

punct $y \in F'_c$ astfel încît $L \otimes O_{F'_c}(x) = O_{F'_c}(y)$. Folosind omomorfismul f_c obţinem o acţiune

$$B \times F'_c \to F'_c \text{ pentru orice } c \in P^1 - S.$$

Deoarece $\{f_c\}_{c \in P^1 - S}$ reprezintă o familie algebrică de omomorfisme de grupuri algebrice, obţinem atunci o acţiune

$$\sigma_0 : B \times g^{-1}(P^1 - S) \to g^{-1}(P^1 - S).$$

În particular, fiecare element $b \in B$ defineşte un automorfism al lui $g^{-1}(P^1 - S)$ care după teorema (10.21) se prelungeşte în mod unic la un automorfism al lui X (deoarece X este model minimal cu $e(X) = 0$). Prin urmare acţiunea σ_0 se prelungeşte în mod unic la o acţiune

$$\sigma : B \times X \to X.$$

Ţinînd cont de definiţia lui B, acţiunea lui B pe X se explicitează în felul următor : dacă $b \in B$ şi $x \in F'_c \subset X$ (cu $c \in P^1 - S$), atunci $b \cdot x = y$, unde y este unicul punct al lui F'_c astfel încît

$$f^* O_B(b - b_0) \otimes O_{F'_c}(x) = O_{F'_c}(y),$$

de unde obţinem, aplicînd norma $N_{F'_c/B}$ ambilor membri :

$$O_B(nb - nb_0 + f(x)) \cong O_B(f(y)),$$

unde $n = \deg(f_c) = (F_b \cdot F'_c)$. Rezultă atunci diagramele comutative

$$(*) \qquad \begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\ b\ } & X \\ {\scriptstyle f}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f} \\ B & \xrightarrow{\ t_{nb}\ } & B \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{ccc} B \times X & \xrightarrow{\ \sigma\ } & X \\ {\scriptstyle 1_B \times f}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f} \\ B \times B & \longrightarrow & B \\ (b, b') & \longmapsto & nb + b' \end{array}$$

Fie acum $B_0 = F_{b_0}$ şi $A_n = \mathrm{Ker}\ (n_B : B \to B)$, cu n_B omomorfismul multiplicare cu n pe B şi A_n considerată ca subschemă în grupuri a lui B (dacă $\mathrm{car}(k) = 0$, atunci A_n este subgrup finit pur

şi simplu). Din (*) rezultă că acţiunea lui A_n pe X păstrează fibrele lui f, şi, în particular, A_n acţionează pe B_0. Notăm această acţiune prin

$\alpha : A_n \to \mathrm{Aut}(B_0)$ = schema în grupuri a automorfismelor lui B_0.

Atunci prin restricţie acţiunea σ a lui B pune în evidenţă morfismul

$$\tau : B \times B_0 \to X$$

care face (ţinînd cont de (*)) diagrama comutativă :

$$\begin{array}{ccc} B \times B_0 & \xrightarrow{\tau} & X \\ & {\scriptstyle n_B \cdot \mathrm{pr}_1} \searrow \quad \swarrow {\scriptstyle f} & \\ & B & \end{array}$$

Acum observăm că $\tau(b, x) = \tau(b', x') \Leftrightarrow \sigma(b - b', x) = x' \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow b - b' \in A_n$ şi $\alpha(b - b')(x) = x'$. (Pentru prima echivalenţă se procedează în felul următor. „$\Rightarrow$": $\sigma(b - b', x) = \sigma(-b', \sigma(b, x)) =$ $= \sigma(-b', \tau(b, x)) = \sigma(-b', \tau(b', x')) = \sigma(-b', \sigma(b', x')) =$ $= \sigma(b' - b', x') = \sigma(0, x') = x'$. „$\Leftarrow$": $\tau(b', x') = \sigma(b', x') =$ $= \sigma(b', \sigma(b - b', x)) = \sigma(b' + b - b', x) = \sigma(b, x) = \tau(b, x)$.)

Rezultă atunci că X este izomorfă cu cîtul lui $B \times B_0$ prin A_n via acţiunea

$$a \cdot (b, b_0) = (b + a, \alpha(a)(b_0)), \quad a \in A_n, \quad b \in B, \quad b_0 \in B_0$$

Înlocuind pe B cu (curba eliptică) $B/\mathrm{Ker}(\alpha)$, am demonstrat :

(10.25) TEOREMĂ. *Fiecare suprafaţă hipereliptică X are forma $X = B_1 \times B_0/A$, unde B_0 şi B_1 sînt curbe eliptice, A — subschemă în grupuri finită a lui B_1 ce acţionează pe produsul $B_1 \times B_0$ prin formula $a(b_1, b_0) = (b_1 + a, \alpha(a)(b_0))$, cu $a \in A$, $b_1 \in B_1$, $b_0 \in B_0$ ş $\alpha : A \to \underline{\mathrm{Aut}}(B_0)$ omomorfism injectiv convenabil. În plus, cele două fibrări eliptice ale lui X sînt date de : $f : B_1 \times B_0/A \to B_1/A = B$ (curbă eliptică) şi $g : B_1 \times B_0/A \to B_0/\alpha(A) \cong P^1$.*

(10.26) Ne propunem acum ca, folosind teorema (10.25) şi structura destul de simplă pe care o are grupul automorfismelor $G = \mathrm{Aut}(B_0)$ al unei curbe eliptice B_0 peste un corp k de caracte-

ristică diferită de 2 și 3, să enumerăm toate cazurile posibile pentru suprafețele hipereliptice.

Fie H subgrupul tuturor translațiilor curbei eliptice B_0(H este subgrup în G) ce este izomorf cu grupul subiacent curbei B_0 prin aplicația $t_b \leftrightarrow b \in B_0$), și $F = \mathrm{Aut}(B_0, 0)$ subgrupul lui G format din toate automorfismele lui B_0 ce lasă elementul $0 \in B_0$ pe loc. Un rezultat elementar de rigiditate pentru varietăți abeliene (vezi Mumford [2], § 4, sau Safarevici [1], pag. 221) are drept consecință imediată faptul că orice $\sigma \in F$ este omomorfism de grupuri, adică pentru orice b, $b' \in B_0$ are loc $\sigma(b + b') = \sigma(b) + \sigma(b')$. De aici rezultă relația $\sigma \circ t_b = t_{\sigma(b)} \circ \sigma$ pentru orice $b \in B_0$ și orice $\sigma \in F$. De asemenea, pentru orice $u \in G$ are loc relația $u = t_{u(0)} \circ \sigma$ cu $\sigma \in F$. De aici rezultă că subgrupul generat de $H \cup F$ coincide cu G, că H este divizor normal în G și (fapt evident) $H \cap G = \{1_{B_0}\}$. Altfel spus, G coincide cu produsul semidirect $H{*}F$ al subgrupului normal H cu subgrupul F, sau încă, $\mathrm{Aut}(B_0)$ coincide cu produsul semidirect al grupului B_0 (izomorf cu H) cu grupul $\mathrm{Aut}(B_0, 0)$.

Dacă B_0 este o curbă eliptică, notăm prin $j(B_0)$ j-invariantul curbei B_0 (vezi Hartshorne [1] sau Tate [1]). Atunci (*loc. cit.*) $\mathrm{Aut}\,(B_0) = \{1_E, -1_E\} = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ dacă $j(B_0) \neq 0,\ 12^3$, $\mathrm{Aut}(B_0, 0) \cong$ $\cong \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ dacă $j(B_0) = 12^3$, și $\mathrm{Aut}\,(B_0, 0) \cong \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ dacă $j(B_0) = 0$ (în toate cazurile am presupus $\mathrm{car}(k) \neq 2, 3$).

Ținînd cont că subgrupul H este izomorf cu B_0, avem $\mathrm{Aut}(B_0) =$ $= B_0{*}\mathrm{Aut}\,(B_0, 0)$ (produs semidirect). Atunci, în notațiile teoremei (10.25), nu putem avea $\alpha(A) \subset B_0$. Într-adevăr, dacă $\alpha(A) \subset B_0$, atunci cîtul $B_0/\alpha(A)$ ar fi curbă eliptică, ceea ce contrazice faptul că $B_0/\alpha(A) \cong P^1$. Fie atunci a un element al lui A astfel încît imaginea lui $\alpha(a)$ în $\mathrm{Aut}\ (B_0)/B_0$ să genereze imaginea subgrupului $\alpha(A)$ în $\mathrm{Aut}\,(B_0)/B_0 \cong \mathrm{Aut}\,(B_0, 0)$ (după cele spuse mai sus, acest ultim grup este ciclic de ordin 2, 4 sau 6). Atunci $\alpha(a)$ este un automorfism al lui B_0 ce posedă un punct fix. Într-adevăr, avem $\alpha(a) =$ $= \sigma \circ t_b$ cu $\sigma \in \mathrm{Aut}\,(B_0, 0) - \{1_{B_0}\}$ și $b \in B_0$. A găsi un punct fix pentru $\alpha(a)$ revine la a găsi un $z \in B_0$ astfel încît $\sigma(z) + \sigma(b) = z$. Însă deoarece $\sigma \neq 1_{B_0}$, endomorfismul $\sigma - 1_{B_0}$ al lui B_0 este surjectiv, și deci $-\sigma(b)$ are o preimagine $z \in B_0$ prin $\sigma - 1_{B_0}$.

Înlocuind originea cu un astfel de punct fix al lui $\alpha(a)$, deducem imediat că $\alpha(A)$ este un produs direct de forma

$$\alpha(A) \cong A_0 \times \mathbb{Z}/n\mathbb{Z},$$

cu A_0 subschemă în grupuri a lui B_0(A_0 finită) și n putînd lua una din valorile 2, 3, 4 sau 6. Deoarece A_0 și $\alpha(a)$ comută și

$\alpha(a) \in \mathrm{Aut}(B_0, 0)$, avem $A_0 \subset U = \{b \in B_0 \mid \alpha(a)(b) = b\}$. Ținînd cont de Tate [1], mulțimea U poate fi explicitată și rezultă că avem următoarele posibilități ($\mathrm{car}(k) \neq 2, 3$):

a) $n = 2$ și atunci $U = \mathrm{Ker}(2_{B_0}) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

b) $n = 3$ și atunci $U = \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$.

c) $n = 4$ și atunci $U = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

d) $n = 6$ și atunci $U = \{0\}$.

Ținînd cont de toate aceste observații rezultă că avem următoarele posibilități de existență a suprafețelor hipereliptice în caracteristică diferită de 2 și 3:

(10.27) *Listă.* (Bagnera — DeFranchis)

a_1) $B_1 \times B_0/(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ cu a generator al lui $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ și cu acțiunea $a(b_1, b_0) = (b_1 + a, -b_0)$.

a_2) $B_1 \times B_0/(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$ cu a și g generatori ai lui $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$ astfel încît $\alpha(a) \in \mathrm{Aut}(B_0, 0)$ este automorfismul $b \mapsto -b$ al lui B_0, iar $\alpha(g) \in B_0$ corespunde translației t_c a lui B_0. În acest caz acțiunea este:

$$a \cdot (b_1, b_0) = (b_1 + a, -b_0) \text{ și } g \cdot (b_1, b_0) = (b_1 + g, b_0 + c)$$

b_1) $B_1 \times B_0/(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})$ cu a generator al lui $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$, $\alpha(a) = \omega \in \mathrm{Aut}(B_0, 0)$ automorfism de ordin 3. Acest caz apare numai dacă $j(B_0) = 0$ și acțiunea este dată de $a \cdot (b_1, b_0) = (b_1 + a, \omega(b_0))$.

b_2) $B_1 \times B_0/(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})^2$ cu a și g generatori ai lui $(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})^2$ astfel încît $\alpha(a) = \omega \in \mathrm{Aut}(B_0, 0)$ automorfism de ordin 3, iar $\alpha(g) \in B_0$ corespunde translației t_c a lui B_0. Acest caz apare numai dacă $j(B_0) = 0$ și acțiunea este dată de:

$$a \cdot (b_1, b_0) = (b_1 + a, \omega(b_0)) \text{ și } g \cdot (b_1, b_0) = (b_1 + g, b_0 + c).$$

În această situație mai avem $\omega(c) = c$ și ordinul lui $c = 3$.

c_1) $B_1 \times B_0/(\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})$ cu $\alpha(a) = i \in \mathrm{Aut}(B_0, 0)$ automorfism de ordin 4. Acest caz apare numai dacă $j(B_0) = 12^3$ și acțiunea este $a \cdot (b_1, b_0) = (b_1 + a, i(b_0))$.

c_2) $B_1 \times B_0/(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \times (\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})$ cu a generator al lui $0 \times (\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})$ și g generator al lui $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \times 0$, astfel încît $\alpha(a) = i \in \mathrm{Aut}(B_0, 0)$ automorfism de ordin 4 și $\alpha(g) \in B_0$ corespunde translației t_c a lui B_0. Acest caz apare numai dacă $j(B_0) = 12^3$ și acțiunea este dată de

$$a \cdot (b_1, b_0) = (b_1 + a, i(b_0)) \text{ și } g \cdot (b_1, b_0) = (b_1 + g, b_0 + c).$$

În această situație mai avem $i(c) = c$ și ordinul lui $c = 2$.

d) $B_1 \times B_0/(\mathbb{Z}/6\mathbb{Z})$ cu a generator al lui $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$, $\alpha(a) = -\omega \in \mathrm{Aut}(B_0, 0)$ cu ω automorfism de ordin 3, iar acţiunea este $a \cdot (b_1, b_0) = (b_1 + a, -\omega(b_0))$. Acest caz apare numai dacă $j(B_0) = 0$.

Este uşor de văzut că alte posibilităţi nu mai există. De exemplu cazul $n = 2$ şi $A_0 = \mathrm{Ker}\,(2_{B_0})$ este imposibil căci $A \subset B$ şi $A_0 \subset B_0$.

(10.28) *Referinţe bibliografice.* Teoremele (10.2), (10.3), (10.9), (10.19), (10.25) şi lista Bagnera-DeFranchis sînt prezentate după Bombieri-Mumford [1]. Proprietăţile elementare ale suprafeţelor Enriques ((10.11), (10.12), (10.13), (10.14) şi (10.15)) sînt luate din Bombieri-Mumford [2], iar exemplul (10.16) din Beauville [1]. Demonstraţia teoremei (10.17) reprezintă o adaptare după capitolul X din Şafarevici şi al. [1]. Teorema (10.21) împreună cu consecinţa sa (10.22) apare în mai multe variante în Şafarevici [2], Şafarevici şi al. [1], sau Beauville [1].

§ 11.

SUPRAFEŢE RIGLATE CRITERIUL NOETHER-TSEN

(11.1) DEFINIŢIE. Vom spune că o suprafaţă X este *riglată* dacă există o curbă B nesingulară şi proiectivă astfel încît X să fie biraţional izomorfă cu $P^1 \times B$.

(11.2) DEFINIŢIE. Fie X o suprafaţă şi B o curbă (proiectivă şi nesingulară). Se numeşte *fascicul de curbe pe X de bază B* orice aplicaţie raţională dominantă $\pi : X \to B$ cu proprietatea că $k(B)$ este algebric închis în $k(X)$.

Rezultă atunci că π este definită în complementara unui număr finit de puncte $x_1, \ldots, x_n (n \geqslant 0)$. Dacă aceste puncte sînt fundamentale pentru π (adică π nu poate fi definită în aceste puncte), atunci $x_1, \ldots, x_n$ mai poartă numele de punctele bază ale fasciculului π. Dacă $y \in B$ este un punct arbitrar, atunci $\pi^{-1}(y)$ este o curbă pe X, iar $\{\pi^{-1}(y) | \ y \in B\}$ se numeşte familia curbelor fasciculului π. Dacă $y = \eta$ este punctul generic al lui B, atunci $\pi^{-1}(\eta)$ se numeşte curba generică a fasciculului π (sau fibra generică a lui π).

(11.3) TEOREMĂ. (Noether-Tsen). *Fie X o suprafaţă pe care s-a dat un fascicul $\pi : X \to B$ de curbe de bază curba B, a cărui fibră generică este de gen aritmetic zero. Atunci X este biraţional izomorfă cu $P^1 \times B$. În particular, X este o suprafaţă riglată.*

Demonstraţia acestei teoreme utilizează mai multe fapte ce prezintă interes şi în sine. Mai întîi o definiţie.

(11.4) DEFINIŢIE. Vom spune că un corp comutativ K are *proprietatea* $C_i (i \geqslant 0)$ dacă pentru orice $n \geqslant 1$ şi $d \geqslant 1$ astfel încît $d^i < n+1$ şi orice hipersuprafaţă H din $P^n(K)$ de grad d, există un punct al lui H raţional peste K. Altfel spus, orice polinom omogen cu coeficienţi în K de grad d în $n+1$ variabile are o soluţie netrivială în K^{n+1} dacă $d^i < n+1$ (cu $d \geqslant 1$ şi $n \geqslant 1$).

(11.5) *Observaţii.* a) Corpul K are proprietatea C_0 dacă şi numai dacă K este algebric închis.

b) Dacă corpul K are proprietatea C_i, atunci K are şi proprietatea C_j pentru orice $j \geqslant i$.

c) Orice corp finit are proprietatea C_1 (teorema Chevalley-Warning, vezi J-P. Serre, *Cours d'arithmétique*, Paris 1970, I, § 2).

d) Corpul numerelor reale nu are proprietatea C_i pentru orice $i \geqslant 0$.

(11.6) TEOREMĂ. a) *Fie k un corp algebric închis. Atunci corpul de fracţii $k(T)$ al inelului de polinoame $k[T]$ în nedeterminata T are proprietatea C_1.*

b) *Dacă corpul K are proprietatea C_1, atunci orice extindere algebrică $E \supset K$ are de asemenea proprietatea C_1.*

Demonstraţia teoremei (11.6) necesită două leme.

(11.6.1) LEMĂ. *Fie K un corp nealgebric închis. Există atunci un număr natural n şi un polinom omogen de grad n în n variabile care nu are nici o soluţie netrivială în K.*

Demonstraţia lemei (11.6.1). Deoarece K nu este algebric închis există o extindere finită $L \supset K$ de grad $n > 1$. Fie $N : L \to K$ funcţia normă. Ea are proprietăţile: $N(xy) = N(x)\,N(y)$ pentru orice x, $y \in L$ şi dacă $x \in L - \{0\}$, atunci $N(x) \neq 0$. Fie $e_1, \ldots, e_n$ o bază vectorială a lui L peste K. Vom construi un polinom omogen $P \in K[X_1, \ldots, X_n]$ de grad n astfel încît pentru orice $x \in L$ să avem $N(x) = P(\xi_1, \ldots, \xi_n)$, unde $x = \Sigma \xi_i e_i$ cu $\xi_i \in K$. Pentru aceasta considerăm elementele $\varepsilon^r_{ij} \in K$ astfel încît

$$e_i e_j = \sum_{r=1}^{n} \varepsilon^r_{ij} e_r$$

şi punem atunci $P(X_1, \ldots, X_n) = \det \|a_{ij}\|$, unde $a_{ij} = \sum_{r=1}^{n} X_r \varepsilon^j_{ri}$. Pentru a vedea că pentru orice $x \in L$ avem $N(x) = P(\xi_1, \ldots, \xi_n)$, observăm că $x \cdot e_i = \left(\sum_{r=1}^{n} \xi_r e_r\right) \cdot e_i = \sum_{r=1}^{n} \xi_r (e_r e_i) = \sum_{r=1}^{n} \xi_r \sum_{s=1}^{n} \varepsilon^s_{ri} e_s =$ $= \sum_{s=1}^{n} \left(\sum_{r=1}^{n} \xi_r \varepsilon^s_{ri} \right) e_s$, de unde

$$N(x) = \det \left\| \sum_{r=1}^{n} \xi_r \varepsilon^s_{ri} \right\| = \det \| a_{is}(\xi) \| = P(\xi_1, \ldots, \xi_n).$$

Datorită faptului că $P(\xi_1, \ldots, \xi_n) = N(x) \neq 0$ pentru orice $(\xi_1, \ldots, \xi_n) \in K^n - \{0\}$ şi $x = \sum_{i=1}^{n} \xi_i e_i$, lema (11.6.1) este demonstrată.

(11.6.2) LEMĂ. *Fie K un corp cu proprietatea C_1 şi $f_1, \ldots, f_r$ r forme omogene peste K ($r \geqslant 1$) în n variabile şi de grad d. Dacă $n > rd$, atunci aceste forme posedă o soluţie comună netrivială în K^n.*

Demonstraţia lemei (11.6.2). Dacă K este algebric închis, totul este bine cunoscut. Presupunem deci K nealgebric închis. Fie $\Phi(X_1, \ldots, X_e)$ o formă omogenă de grad $e \geqslant r$ care nu are în K decît soluţia trivială (cf. (11.6.1)). Putem alege de fapt o formă de grad oricît de mare dorim (care să nu aibă nici-o soluţie netrivială în K), deoarece dacă $\Psi(X_1, \ldots, X_e)$ este o astfel de formă, atunci $\Psi(X_1, \ldots, X_e)^n$ de asemenea nu are nici-o soluţie netrivială în K pentru orice $n \geqslant 1$. Presupunem că $(n-dr)\,[e/r] > dr$, $[e/r]$ partea întreagă a numărului e/r. Considerăm forma omogenă

$$\Phi'(X_{11}, \ldots, X_{n1}; \ \ldots; \ X_{1[e/r]}, \ldots, X_{n[e/r]})$$

obţinută din Φ în felul următor:

— se substituie mai întîi în Φ variabilele $X_1, \ldots, X_r$ prin formele $f_1(X_{11}, \ldots, X_{n1}), \ldots, f_r(X_{11}, \ldots, X_{n1})$,

— apoi se substituie variabilele $X_{r+1}, \ldots, X_{2r}$ prin $f_1(X_{12}, \ldots, X_{n2}), \ldots, f_r(X_{12}, \ldots, X_{n2})$, ş.a.m.d.

— dacă mai rămîn variabile după ce s-au făcut toate substituţiile de mai sus de $[e/r]$-ori, se substituie aceste variabile prin zero.

Prin urmare:

$$\Phi'(X_{11}, \ldots, X_{n1}; \ \ldots \ ; \ X_{1[e/r]}, \ldots, X_{n[e/r]}) =$$

$$= \Phi(f_1(X_{11}, \ldots, X_{n1}), \ldots, f_r(X_{11}, \ldots, X_{n1}); \ \ldots; f_1(X_{1[e/r]}, \ldots,$$

$$\ldots, X_{n[e/r]}) \ldots f_r(X_{1[e/r]}, \ldots, X_{n[e/r]}); \ 0, \ldots, 0).$$

Rezultă că Φ' este o formă omogenă de grad de în $n\,[e/r]$ variabile. Avem $n\,[e/r] > de$. Într-adevăr, $dr\,([e/r]+1) \geqslant de$, iar pe de altă parte $n\,[e/r] \geqslant dr\,([e/r]+1)$ prin ipoteză. Conchidem că Φ' are o soluţie netrivială în K. Însă Φ avînd în K numai soluţia trivială, deducem că $f_1, \ldots, f_r$ au o soluţie netrivială în K. Q.E.D.

Demonstraţia teoremei (11.6). a) Fie $f(X_1, \ldots, X_n)$ un polinom omogen cu coeficienţi în $k(T)$ în variabilele $X_1, \ldots, X_n$ şi de grad $d < n$. Evident, putem presupune că toţi coeficienţii lui f sînt din $k[T]$. Vom găsi atunci o soluţie netrivială chiar în $k[T]$ (mai exact, în $k[T]^n$). Fie

$$f(X_1, \ldots, X_n) = \sum_{i_1+\ldots+i_n=d} c_{i_1,\ldots,i_n} X_1^{i_1} \ldots X_n^{i_n}, \quad c_{i_1,\ldots,i_n} \in k[T].$$

Elementele $c_{i_1,\ldots,i_n}$ fiind polinoame în T, fie

$$r = \max\{\deg c_{i_1,\ldots,i_n}/(i_1, \ldots, i_n)\}.$$

Atunci putem scrie pe $f(X_1, \ldots, X_n)$ sub forma:

$$f(X_1, \ldots, X_n) = f_0(X_1, \ldots, X_n) + \ldots + T^r f_r(X_1, \ldots, X_n).$$

Considerăm variabilele

$$\begin{matrix} Y_{10}, & Y_{11}, & \ldots, & Y_{1s} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ Y_{n0}, & Y_{n1}, & \ldots, & Y_{ns} \end{matrix}$$

unde s este un întreg astfel încît

(*) $$(n - d)\, s > (r + 1) - n.$$

Fie acum $(Y_{10}, \ldots, Y_{ns})$ forma omogenă de grad d în $n(s+1)$ variabile cu coeficienţi în $k[T]$, obţinută pornind de la $f(X_1, \ldots, X_n)$ şi înlocuind variabilele $X_1, \ldots, X_n$ după cum urmează:

$$\begin{matrix} X_1 \text{ prin } Y_{10} + Y_{11}T + \ldots + Y_{1s}T^s, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ X_n \text{ prin } Y_{n0} + Y_{n1}T + \ldots + Y_{ns}T^s, \end{matrix}$$

deci

$$\varphi(Y_{10}, \ldots, Y_{ns}) = f\left(\sum_{j=0}^{s} Y_{1j}T^j, \ldots, \sum_{j=0}^{s} Y_{nj}T^j\right).$$

Este clar că gradul în T al lui φ este $ds + r$. Putem deci scrie:

$$\varphi(Y_{10}, \ldots, Y_{ns}) = \varphi_0(Y_{10}, \ldots, Y_{ns}) +$$
$$+ T\varphi_1(Y_{10}, \ldots, Y_{ns}) + \ldots + T^{ds+r}\varphi_{ds+r}(Y_{10}, \ldots, Y_{ns}).$$

Sîntem deci în prezenţa a $ds + r + 1$ forme omogene $\varphi_0, \ldots, \varphi_{ds+r}$ în $n(s + 1)$ variabile cu coeficienţi în corpul algebric

închis k. Din (*) deducem $ds + r + 1 < ns + n$, de unde rezultă că aceste forme au o soluţie netrivială în k. Conchidem că f are o soluţie netrivială în $k[T]$.

b) Este suficient să demonstrăm afirmaţia punctului b) în cazul cînd extinderea E/K este finită, deoarece dacă $f \in E[X_1, \ldots, X_n]$ este o formă omogenă de grad $d < n$, există o extindere finită E_1/K astfel încît $f \in E_1 [X_1, \ldots, X_n]$, de unde deducem că f are o soluţie netrivială în E_1.

Fie deci $m = [E : K]$ şi $f \in E [X_1, \ldots, X_n]$ ca mai sus. Alegem o bază vectorială $e_1, \ldots, e_m$ a lui E peste K. Introducem variabilele:

$$\begin{matrix} Y_{11}, \ldots, Y_{1m}, \\ \ldots\ldots \\ Y_{n1}, \ldots, Y_{nm} \end{matrix}$$

şi considerăm forma omogenă

$$\Phi(Y_{11}, \ldots, Y_{1m}; \ldots; Y_{n1}, \ldots, Y_{nm}) = f\left(\sum_{i=1}^{m} e_i Y_{1i}, \ldots, \sum_{i=1}^{m} e_i Y_{ni}\right).$$

$$\Phi \text{ se scrie } \Phi(Y) = \sum_{i=1}^{m} e_i \Phi_i(Y), \text{ cu } \Phi_i(Y) \in K[Y_{11}, \ldots, Y_{nm}]$$

forme de grad d. Deoarece $md < mn$, lema (11.6.2) implică faptul că formele $\Phi_1(Y), \ldots, \Phi_m(Y)$ au o soluţie netrivială în K, să zicem $(\xi_{11}, \ldots, \xi_{mn}) \in K^{nm}$. Atunci $(\eta_1, \ldots, \eta_n)$ cu $\eta_j = \sum_{i=1}^{m} e_i \xi_{ji}$ reprezintă o soluţie netrivială în E a lui f. Q.E.D.

(11.7) LEMĂ. *Fie K un corp comutativ şi fie X o curbă algebrică proprie peste K astfel încît $\bar{X} = X \otimes_K \bar{K}$ este K-izomorfă cu dreapta proiectivă $P^1(\bar{K})$, unde prin $\bar{K}$ am notat o închidere algebrică a lui K. Atunci X este K-izomorfă cu* Proj $(K[X_0, X_1, X_2]/(Q))$, *unde $Q \in K[X_0, X_1, X_2]$ este o formă pătratică nedegenerată.*

Demonstraţie. Din ipoteze rezultă că X este geometric integră şi deci, ţinînd cont de EGA IV (4.5.9) şi (4.6.1), corpul funcţiilor raţionale $K(X)$ al lui X este o extindere regulată a lui K. Atunci $\bar{K}(\bar{X}) \cong K(X) \otimes_K \bar{K}$. Cum X este şi geometric netedă, rezultă că fasciculul $\Omega_{\bar{X}} = \Omega^1_{\bar{X}/K}$ se obţine din Ω_X prin extinderea scalarilor, adică are loc formula $\Omega_{\bar{X}} \cong \Omega_X \otimes_K \bar{K}$. Trecînd la duale obţinem izomorfismul canonic:

(**) $$(\Omega_{\bar{X}})^{\vee} \cong (\Omega_X)^{\vee} \otimes_K \bar{K}.$$

Însă $(\Omega_{\bar{X}})^{\vee} = O_{P^1(\bar{K})}(2)$ şi deci $\dim_{\bar{K}} H^0(\bar{X}, (\Omega_{\bar{X}})^{\vee}) = 3$. Dacă $\sigma_0, \sigma_1, \sigma_2$ este o bază a lui $H^0(\bar{X}, (\Omega_{\bar{X}})^{\vee})$ peste $\bar{K}$, atunci aplicaţia raţională $x \mapsto (\sigma_0(x), \sigma_1(x), \sigma_2(x)) : \bar{X} \to P^2(\bar{K})$ este peste tot definită şi este imersie închisă deoarece $O(2)$ este foarte amplu pe $\bar{X}$. Însă izomorfismul (**) arată că se poate obţine o bază a lui $H^0(\bar{X}, (\Omega_{\bar{X}})^{\vee})$ pornind de la o bază arbitrară $\sigma_0, \sigma_1, \sigma_2$ a lui $H^0(X, (\Omega_X)^{\vee})$ peste K. În acest caz imersia de mai sus este chiar o K-imersie (mai exact spus, provine dintr-o K-imersie). Deci X este K-izomorfă cu o subschemă închisă a lui $P^2(K)$ de forma $\mathrm{Proj}\,(K[X_0, X_1, X_2]/(Q))$, cu Q formă pătratică nedegenerată în variabilele X_0, X_1 şi X_2 (nedegenerarea lui Q provine din faptul că Q este astfel peste $\bar{K}$). Q.E.D.

(11.8) Lemă. *În ipotezele lui* (11.7), *presupunem în plus că X posedă un punct raţional peste K. Atunci X este K-izomorfă cu $P^1(K)$.*

Demonstraţie. Fie $x \in X$ un punct raţional peste K şi I fasciculul coerent de ideale ce defineşte subschema închisă şi integră $\{x\} \hookrightarrow X$ a lui X. Atunci $\bar{I}^{-1} = I^{-1} \otimes_K \bar{K}$ este un $O_{\bar{X}}$-modul inversibil de grad 1, deci ţinînd cont că $\bar{X} = P^1(\bar{K})$, avem $\dim_{\bar{K}} H^0(\bar{X}, \bar{I}^{-1}) = 2$. Cum $H^0(\bar{X}, \bar{I}^{-1}) \cong H^0(X, I^{-1}) \otimes_K \bar{K}$, rezultă că există o funcţie raţională neconstantă $f \in K(X)$ care are în x un pol simplu. Atunci $f : X \to P^1(K)$ este în mod necesar un K-izomorfism. Q.E.D.

(11.9) Corolar. *Fie K un corp cu proprietatea C_1 şi fie X o curbă geometric integră, proprie peste K şi de gen aritmetic zero. Atunci X este K-izomorfă cu $P^1(K)$.*

Demonstraţie. Avem $p_a(X) = 1 - \chi(O_X) = 1 - \dim_K H^0(O_X) + \dim_K H^1(O_X) = 1 - \dim_{\bar{K}} H^0(O_{\bar{X}}) + \dim_{\bar{K}} H^1(O_{\bar{X}})$. Cum X este geometric integră, $\dim_{\bar{K}} H^0(O_{\bar{X}}) = 1$, de unde $H^1(O_{\bar{X}}) = 0$, şi deci $\bar{X} = P^1(\bar{K})$. După (11.7), X este *K-izomorfă* cu o conică nedegenerată $Q(X_0, X_1, X_2) = 0$ în $P^2(K)$. Cum K are proprietatea C_1, această conică are cel puţin un punct raţional peste K, şi demonstraţia se încheie ţinînd cont de (11.8). Q.E.D.

Demonstraţia teoremei (11.3). Notînd prin η punctul generic al lui B, corpul $k(\eta) = k(B)$ are proprietatea C_1 în baza teoremei (11.6). Prin ipoteză, curba $X_\eta = \pi^{-1}(\eta)$ este de gen aritmetic zero (peste $k(\eta)$). Fie $\varphi : X' \to X$ o compunere de transformări pătratice astfel încît $\pi \circ \varphi$ să devină morfism. Deoarece $k(B)$ este algebric închis în $k(X') = k(X)$ şi deoarece fibra generică rămîne neschimbată la aceste transformări pătratice, deducem, ţinînd cont de (7.3), că X_η este geometric integră. După (11.9) există atunci un $k(\eta)$-izomorfism între X_η şi $P^1(k(\eta))$, şi deci $k(\eta)(t) = k(X_\eta)$, cu t o variabilă peste $k(\eta)$. Cum $k(X_\eta) = k(X)$, avem deci $k(X) = k(B)(t)$ cu t variabilă peste $k(B)$, altfel spus, X este biraţional izomorfă cu $P^1 \times B$. Q.E.D.

(11.10) TEOREMĂ. *Fie* $\pi : X \to B$ *un morfism surjectiv de la suprafața* X *la curba (proiectivă și nesingulară)* B *astfel încît să existe un punct închis* $b \in B$ *cu proprietatea că* $\pi^{-1}(b) = P^1$. *Atunci există o secțiune* $\sigma : B \to X$ *a lui* π *(adică un morfism* σ *cu proprietatea* $\pi \circ \sigma = 1_B$*), precum și un deschis* $U \subseteq B$ *ce conține pe* b *și un izomorfism* $f : \pi^{-1}(U) \xrightarrow{\sim} P^1 \times U$ *astfel încît diagrama:*

$$\begin{array}{ccc} \pi^{-1}(U) & \xrightarrow[\sim]{f} & P^1 \times U \\ & {\scriptstyle \pi|\pi^{-1}(U) = \pi'} \searrow \quad \swarrow {\scriptstyle p_2} & \\ & U & \end{array}$$

să fie comutativă, unde p_2 *este proiecția lui* $P^1 \times U$ *pe* U.

Demonstrație. Deoarece B este o curbă nesingulară și $\pi_*(O_X)$ este un O_B-modul coerent fără torsiune, $\pi_*(O_X)$ este local liber de rang finit. Cum π este plat și $H^1(\pi^{-1}(b), O_{\pi^{-1}(b)}) = 0$ rezultă că într-o vecinătate V a lui b funcția $b' \mapsto \dim H^1(\pi^{-1}(b'), O_{\pi^{-1}(b')})$ este identic nulă și prin urmare omomorfismul natural

$$\pi_*(O_X) \otimes k(b') \to H^0(\pi^{-1}(b'), O_{\pi^{-1}(b')})$$

este un izomorfism pentru orice $b' \in V$. Deoarece $\pi^{-1}(b) \cong P^1$, $\dim H^0(\pi^{-1}(b), O_{\pi^{-1}(b)}) = 1$ și deci $\pi_*(O_X)$ este local liber de rang 1. De aici rezultă $\pi_*(O_X) = O_B$, și deci $k(B)$ este algebric închis în $k(X)$. Din (7.3) rezultă că există un deschis U_1 al lui B ce conține punctul b astfel încît pentru orice $b' \in U_1$ fibra $F_{b'} = \pi^{-1}(b')$ să fie integră. Cum $F_b = P^1$ și genul aritmetic al lui $F_{b'}$, nu depinde de b', fibra generică F_η are genul aritmetic zero, iar pentru orice punct închis $b' \in U_1, F_{b'} \cong P^1$. Din teorema (11.3) și demonstrația ei deducem că $F_\eta \cong P^1(k(\eta)) = P^1(k(B))$, și deci F_η are un punct rațional peste $k(B) = O_{B,\eta}$. Altfel spus, există un $k(B)$-morfism $\sigma' :$ Spec $(k\,(B)) \to F_\eta$, și deci un morfism $\sigma :$ Spec $(O_{B,\eta}) \to X$ a cărui compunere cu π este exact incluziunea canonică Spec $(O_{B,\eta}) \hookrightarrow B$. Aplicînd EGA I (6.5.1) deducem existența unei secțiuni raționale $\sigma : B \to X$ a lui π, care este în mod necesar regulată deoarece B este curbă nesingulară, iar X varietate proiectivă.

Notînd $D = \sigma\,(B)$, avem $(D \cdot F_{b'}) = 1$ pentru orice $b' \in B$. Fie $X' = \pi^{-1}(U_1)$ și $\pi' = \sigma/X'$. Cum toate fibrele lui π' sînt drepte

proiective şi pentru orice $b' \in U_1$ avem $O_{X'}(D) \otimes O_{F_{b'}} \cong O_{F_{b'}}(1)$, rezultă

$$\dim_{k(b')} H^0(O_X(D) \otimes k(b')) = 2 \text{ pentru orice } b' \in U_1,$$

de unde deducem (ţinînd cont de teoremele de schimbare a bazei) că $E = \pi'_* O_{X'}(D)$ este un O_{U_1}-modul local liber de rang 2 şi că omomorfismul canonic

$$\pi'_* O_{X'}(D) \otimes k(b') \to H^0(O_{X'}(D) \otimes O_{F_{b'}})$$

este un izomorfism pentru orice $b' \in U_1$. De aici rezultă imediat că omomorfismul canonic $\pi'^* \pi'_* O_{X'}(D) = \pi'^*(E) \to O_{X'}(D)$ este surjectiv. Din proprietatea de universalitate a lui $P(E)$ (fibratul proiectiv asociat lui E) rezultă atunci că există un unic U_1-morfism $u : X' \to P(E)$ astfel încît $u^* O_{P(E)}(1) \cong O_{X'}(D)$. Din definiţia lui E deducem imediat că u este izomorfism (deoarece pentru fiecare $b' \in U_1$ morfismul $u_{b'} : F_{b'} \to P^1(k(b'))$ dedus din u este evident izomorfism). Q.E.D.

(11.11) Corolar. *În ipotezele teoremei (11.10), presupunem în plus că morfismul π are toate fibrele închise izomorfe cu P^1. Atunci există un O_B-modul E local liber de rang 2 şi un B-izomorfism $u : X \xrightarrow{\sim} P(E)$. În plus, dacă E şi E' sînt două O_B-module local libere de rang 2, atunci există un B-izomorfism $v : P(E) \xrightarrow{\sim} P(E')$ dacă şi numai dacă există un O_B-modul inversibil L astfel încît $E' \cong E \otimes L$.*

Demonstraţie. Exceptînd ultima afirmaţie, totul este clar din demonstraţia teoremei (11.10). Dacă există L ca în enunţ, atunci $P(E) \cong P(E')$ după EGA II (4.1.4). Reciproc, presupunem că există un B-izomorfism $v : P(E) \xrightarrow{\sim} P(E')$. Atunci, ţinînd cont de propoziţia (11.12) de mai jos, $O_{P(E)}$-modulul inversibil $v^* O_{P(E')}(1)$ se scrie în mod unic sub forma

$$v^* O_{P(E')}(1) \cong p^*(L) \otimes O_{P(E)}(s),$$

cu s număr întreg, $p : P(E) \to B$ (resp. $p' : P(E') \to B$) proiecţia canonică a lui $P(E)$ (resp. a lui $P(E')$), şi L un O_B-modul inversibil. Utilizînd formula proiecţiei obţinem :

$$(*) \qquad p_* v^* O_{P(E')}(1) \cong L \otimes p_* O_{P(E)}(s).$$

Însă ţinînd cont de calculul explicit al coomologiei unui fibrat proiectiv (EGA III (2.1.15)) avem $p_* v^* O_{P(E')}(1) \cong p'_* O_{P(E')}(1) \cong E'$ şi

$p_* O_{P(E)}(s) = S^s(E)$ (unde $S^s(E) = 0$ dacă $s < 0$ şi $S^s(E)$ este puterea simetrică de grad s dacă $s \geqslant 0$). Ţinînd cont de (*) rezultă $s = 1$ şi deci $E' = L \otimes E$. Q.E.D.

(11.12) PROPOZIŢIE. *Fie* $f: (E) \to Z$ *un fibrat proiectiv cu* Z *varietate algebrică arbitrară şi* E *un* O_Z*-modul local liber de rang finit. Atunci* Pic $(P(E)) \cong \mathbb{Z}[O_{P(E)}(1)] \oplus f^*(\text{Pic}\,(Z))$, *unde* f^* *este omomorfismul (injectiv) indus de* f *la grupurile Picard şi* $[O_{P(E)}(1)]$ *este clasa lui* $O_{P(E)}(1)$ *în* Pic $(P(E))$.

Propoziţia (11.12) este bine cunoscută şi se deduce fără nici un fel de dificultate din teoremele de schimbare a bazei.

(11.13) DEFINIŢIE. Se numeşte *suprafaţă geometric riglată* o suprafaţă X împreună cu un morfism $f: X \to B$ pe o curbă nesingulară B astfel încît pentru orice punct închis $b \in B$, fibra $F_b = f^{-1}(b)$ este izomorfă cu P^1.

Din (11.10) şi (11.11) rezultă că dacă $f: X \to B$ este o suprafaţă geometric riglată, atunci există un O_B-modul local liber de rang 2 şi un B-izomorfism $u: X \tilde{\to} P(E)$. De asemenea, există o secţiune $\sigma: B \to X$ a lui f.

(11.14) COROLAR. *Fie* $f: X \to B$ *o suprafaţă geometric riglată şi* $\sigma: B \to X$ *o secţiune a lui* B. *Dacă notăm prin* $C = \sigma(B)$, *prin* F *o fibră închisă* F_b *a lui* f, *atunci* Pic$(X) \cong \mathbb{Z}[O_X(C)] \oplus f^*$ (Pic (B)) *şi* Num$(X) \cong \mathbb{Z}\,\{O_X(C)\} \oplus \mathbb{Z}\{O_X(F)\}$, *unde* $[L]$ *(resp.* $\{L\}$*) reprezintă clasa în* Pic (X) *(resp. în* Num (X)*) a* O_X*-modulului inversibil* L.

Demonstraţie. Prima afirmaţie rezultă imediat din (11.12) observînd că dacă $X = P(E)$, cu E O_B-modul local liber de rang 2, atunci $O_X(C) \cong O_{P(E)}(1) \otimes f^*(L') = O_{P(E \otimes L')}(1)$, cu L' O_B-modul inversibil. A doua afirmaţie rezultă din observaţia că Num$(B) = \mathbb{Z}\{b\}$, unde $b \in B$ este un punct închis arbitrar, de unde $f^*(\text{Num}(B)) \cong$ $\cong \mathbb{Z}\{O_X(F_b)\}$. Q.E.D.

(11.15) PROPOZIŢIE. *Dacă* X *este o suprafaţă riglată, atunci* $c(X) = -1$, *adică* $p_n = 0$ *pentru orice* $n \geqslant 1$. *În particular,* $p_g = 0$.

Demonstraţie. Deoarece p_n $(n \geqslant 1)$ sînt invarianţi biraţionali şi X este biraţional izomorfă cu $P^1 \times B$ (cu B curbă proiectivă şi nesingulară), propoziţia (11.15) rezultă atunci din (5.8) ii). Q.E.D.

(11.16) PROPOZIŢIE. *Fie* E *un* O_B*-modul local liber de rang* $r \geqslant 1$ *pe curba nesingulară şi proiectivă* B. *Există atunci un şir de subfascicule local libere ale lui* E, $0 = E_0 \subset E_1 \subset \ldots \subset E_r = E$, *cu* rang $(E_i) = i$ *şi* $E_i / E_{i-1} = L_i$ *inversibil pe* B, $i = 1, \ldots, r$.

Demonstraţie. Folosind inducţie după r, este suficient să determinăm un subfascicul inversibil L al lui E astfel încît E/L să fie local liber (evident de rang $r - 1$). Atunci $P = P(\check{E})$ împreună cu proiecţia sa $p: P \to B$ au proprietatea că există scufundarea uni-



versală $O_P(-1) \hookrightarrow p^*(E)$ astfel încît cîtul $E' = p^*(E)/O_P(-1)$ să fie local liber.

Fie atunci $s \in \Gamma(U, E)$ o secţiune nenulă deasupra unui deschis nevid convenabil $U \subseteq B$. Deoarece E este local liber, secţiunea s pune în evidenţă un morfism $i_s : V \to P$, cu $V \subseteq U$ deschis nevid convenabil, cu proprietatea că $p \circ i_s$ coincide cu incluziunea $V \hookrightarrow B$. Cum i_s este o secţiune raţională a lui p, B este curbă nesingulară şi P este varietate proiectivă, i_s este chiar o secţiune regulată a lui p. În fine, din şirul exact de O_P-module local libere

$$0 \to O_P(-1) \to p^*(E) \to F \to 0$$

deducem şirul exact de O_B-module local libere

$$0 \to i_s^*(O_P(-1)) = L_s \to i_s^* p^*(E) = E \to i_s^*(F) \to 0. \qquad \text{Q.E.D}$$

(11.17) Definiţie. În ipotezele şi notaţiile propoziţiei (11.16) şirul $0 = E_0 \subset E_1 \subset \ldots \subset E_r = E$ cu proprietăţile E_i local liber de rang i şi $E_i/E_{i-1} = L_i$ inversibil pentru orice $i = 1, \ldots, r$ se numeşte *scindare* a lui E. O astfel de scindare va fi notată mai simplu $(L_1, \ldots, L_r)$.

Dacă E este un O_B-modul local liber de rang $r \geqslant 1$, atunci vom nota prin $\det(E) = \overset{r}{\wedge}(E)$ şi prin $\deg(E) = \deg(\det(E))$. Este imediat de văzut că deg este o funcţie aditivă pe categoria O_B-modulelor local libere de rang finit (B fiind bineînţeles o curbă proiectivă şi nesingulară), adică pentru orice şir exact de O_B-module local libere $0 \to E_1 \to E \to E_2 \to 0$, atunci $\deg(E) = \deg(E_1) + \deg(E_2)$.

Într-adevăr, dacă $r_i = \text{rang}(E_i)$, $i = 1, 2$, şi $r = \text{rang}(E)$, avem $r = r_1 + r_2$, iar şirul exact de mai sus induce un izomorfism $\det(E) = \det(E_1) \otimes \det(E_2)$. Rezultă în particular că dacă $(L_1, \ldots, L_r)$ este o scindare a lui E, atunci $\deg(E) = \sum_{i=1}^{r} \deg(L_i)$.

Existenţa scindărilor are drept consecinţă imediată:

(11.18) Corolar. (Riemann-Roch). *Dacă E este un O_B-modul local liber de rang r pe curba proiectivă şi nesingulară B, atunci*

$$\chi(E) = \deg(E) + r(1-g), \quad \textit{cu } g = p_a(B).$$

Demonstraţie. Procedăm prin inducţie după r. Dacă $r = 1$ relaţia din enunţ este tocmai teorema Riemann-Roch obişnuită pentru

module inversibile. Presupunem deci $r > 1$. Din (11.17) rezultă că există un şir exact

$$0 \to L \to E \to E' \to 0$$

de O_B-module local libere cu $\text{rang}(L) = 1$ (şi deci $\text{rang}(E') = r - 1$). Folosind ipoteza de inducţie avem succesiv :

$$\chi(E) = \chi(L) + \chi(E') = \deg(L) + (1 - g) + \deg(E') +$$

$$+ (r - 1)(1 - g) = \deg(E) + r(1 - g). \qquad \text{Q.E.D.}$$

(11.19) PROPOZIŢIE. *Fie $f : X \to B$ o suprafaţă geometric riglată, cu $X = P(E)$, E O_B-modul local liber de rang 2 şi f proiecţia canonică a lui $P(E)$. Atunci :*

a) $q = p_a(B)$.

b) $(L \cdot L) = \deg(E)$, *unde* $L = O_{P(E)}(1)$.

c) $(K^2) = 8(1 - q)$ *şi* $b_2 = 2$.

Demonstraţie. Şirul spectral Leray

$$E_2^{pq} = H^p(B, R^q f_* O_X(n)) \Rightarrow H^{p+q}(X, O_X(n))$$

degenerează pentru orice $n \geqslant 0$, deoarece $X = P(E)$, f este proiecţia canonică a lui $P(E)$ şi se ţine cont de EGA III (2.1.15). Deci

$$H^p(B, S^n(E)) = H^p(X, O_X(n)) \text{ pentru orice } p \geqslant 0 \text{ şi } n \geqslant 0,$$

deoarece (*loc. cit.*) $f_* O_X(n) = S^n(E)$. Pentru $n = 0$ obţinem afirmaţia a). În cazul cînd n este arbitrar $\geqslant 0$, obţinem

$$(*) \qquad \chi(X, O_X(n)) = \chi(B, S^n(E)).$$

Însă după (11.18) avem

$$(**) \qquad \chi(B, S^n(E)) = \deg(S^n(E)) + \text{rang}\,(S^n(E)(1 - p_a(B)).$$

Cum rang $(E) = 2$, avem rang $(S^n(E)) = n+1$. Pe de altă parte, fie (L_1, L_2) o scindare a lui E (o asemenea scindare există în baza propoziției (11.16)). Cum funcția deg este aditivă avem :

$$\deg(S^n(E)) = \deg(S^n(L_1 \oplus L_2)) =$$

$$= \deg\left(\bigwedge^{n+1}\left(\bigoplus_{i=0}^{n}(L_1^i \otimes L_2^{n-i})\right)\right) = \deg\left(\bigotimes_{i=1}^{n}(L_1^i \otimes L_2^{n-i})\right) =$$

$$= n(n+1)/2 \cdot \deg(L_1 \oplus L_2) = n(n+1)/2 \cdot \deg(E).$$

Ținînd cont de toate aceste observații și de (*) și (**), obținem :

$$\chi(X, O_X(n)) = n(n+1)/2 \cdot \deg(E) + (n+1)(1 - p_a(B)),$$

și de aici afirmația b) dacă ținem cont de (1.21).

Pentru a demonstra c) folosim formula bine cunoscută (și elementară) :

$$\omega_X \cong f^*(\omega_B \otimes \det(E)) \otimes O_X(-2),$$

de unde

$$(K^2) = (\omega_X \cdot \omega_X) = (O_X(-2) \cdot O_X(-2)) + 2(O_X(-2) \cdot f^*(\omega_B \otimes \det(E)) =$$

$$= 4(L \cdot L) - 4(L \cdot f^*(\omega_B \otimes \det(E)) = 4 \cdot \deg(E) - 4\deg(\omega_B \otimes \det(E)) =$$

$$= -4\deg(\omega_B) = 8(1 - p_a(B)) = 8(1-q).$$

În fine, deoarece $p_g = 0$ (cf. (11.15)) avem $\Delta = 0$ (cf. (5.1)) și deci formula lui Noether devine :

$$10 - 8q = (K^2) + b_2,$$

de unde ținînd cont că $(K^2) = 8(1-q)$, obținem $b_2 = 2$. Q.E.D.

(11.20) Fie Z o varietate algebrică completă și E_1 și E_2 două O_Z-module local libere de rang finit. Se numește extindere a lui E_2 prin E_1 orice șir exact de forma :

$$(\mathbb{E}) \qquad 0 \to E_1 \xrightarrow{\varphi} E' \xrightarrow{\psi} E_2 \to 0,$$

cu E local liber de rang finit (de altfel faptul că E este local liber de rang finit rezultă din ipotezele că E_1 şi E_2 sînt local libere de rang finit). Dacă

$$(\mathbb{E}') \qquad 0 \to E_1 \xrightarrow{\varphi'} E' \xrightarrow{\psi'} E_2 \to 0$$

este o altă extindere a lui E_2 prin E_1, vom spune că cele două extinderi sînt izomorfe dacă există un omomorfism $u : E \to E'$ de O_Z-module astfel încît diagrama

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & E_1 & \xrightarrow{\varphi} & E & \xrightarrow{\psi} & E_2 & \longrightarrow & 0 \\ & & \| & & \downarrow u & & \| & & \\ 0 & \longrightarrow & E_1 & \xrightarrow{\varphi'} & E' & \xrightarrow{\psi'} & E_2 & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

să fie comutativă. Extinderea ($\mathbb{E}$) se numeşte trivială dacă $E \cong E_1 \oplus E_2$, φ este injecţia canonică $e_1 \to (e_1, 0)$, iar ψ este proiecţia canonică $(e_1, e_2) \to e_2$.

(11.21) PROPOZIȚIE. *Clasele de izomorfism de extinderi ale lui E_2 prin E_1* se *află într-o corespondenţă bijectivă cu elementele grupului $H^1(Z, \mathscr{H}om(E_2, E_1)) = H^1(Z, \check{E}_2 \otimes E_1)$ astfel încît extinderea trivială a lui E_2 prin E_1 corespunde elementului zero al lui $H^1(Z, \check{E}_2 \otimes E_1)$.*

Demonstraţia este standard. Indicăm numai cum se asociază la o extindere

$$(\mathbb{E}) \qquad 0 \to E_1 \to E \to E_2 \to 0$$

un element din $H^1(Z, \mathscr{H}om(E_2, E_1))$. Din şirul exact de mai sus obţinem şirul exact

$$0 \to \mathscr{H}om(E_2, E_1) \to \mathscr{H}om(E_2, E) \to \mathscr{H}om(E_2, E_2) \to 0,$$

de unde omomorfismul canonic indus la coomologie :

$$\delta : \mathrm{Hom}\,(E_2, E_2) = H^0(Z, \mathscr{H}om(E_2, E_2)) \to H^1(Z, \mathscr{H}om(E_2, E_1)).$$

Atunci $\delta(1_{E_2}) \in H^1(Z, \mathscr{H}om\,(E_2, E_1))$ este tocmai elementul corespunzător lui ($\mathbb{E}$) în $H^1(Z, \mathscr{H}om(E_2, E_1))$.

(11.22) TEOREMĂ. *Orice O_{P^1}-modul E local liber de rang 2 este izomorf cu $O_{P^1}(m) \oplus O_{P^1}(n)$ cu m şi n numere întregi convenabile.*

Demonstrație. Fie E local liber de rang 2 pe P^1 și L un O_{P^1}-modul inversibil oarecare. Atunci avem (exercițiu !) :

$$\deg(E \otimes L) = \deg(E) + 2\deg(L),$$

de unde rezultă că alegînd pe L în felul următor :

$$L = \begin{cases} O_P(-d/2) \text{ dacă } d = \deg(E) \text{ este par, și} \\ O_P(-(d-1)/2) \text{ dacă } d \text{ este impar,} \end{cases}$$

avem, dacă notăm cu $E' = E \otimes L$:

$$\deg(E') = 0 \text{ sau } -1.$$

Este clar că este suficient să rezolvăm problema pentru E', și deci putem presupune în plus $d = \deg(E) = 0$ sau -1.

Din (11.18) deducem $\chi(E) = d + 2 \geqslant 1$, de unde $\dim H^0(E) \geqslant 1$. Fie $0 \neq s \in H^0(E)$. Punîndu-ne de acord cu notațiile demonstrației propoziției (11.16), s este atunci o secțiune globală a subfasciculului L_s. Deducem că $\deg(L_s) \geqslant 0$. Cum L_s este inversibil pe P^1, avem deci $L_s \cong O_{P^1}(a)$ cu $a \geqslant 0$. Din demonstrația propoziției (11.16) mai deducem șirul exact

(*) $$0 \to O_{P^1}(a) \to E \to O_{P^1}(d-a) \to 0,$$

unde $d = \deg(E) = 0$ sau -1. Altfel spus, am realizat pe E ca o extindere a lui $O_{P^1}(d-a)$ prin $O_{P^1}(a)$. Însă după (11.21), grupul $H^1(P^1, O_{P^1}(2a-d))$ clasifică clasele de izomorfism de extinderi ale lui $O_{P^1}(d-a)$ prin $O_{P^1}(a)$. Cum $a \geqslant 0$ și $d = 0$ sau -1, avem $2a - d \geqslant -1$, de unde deducem $H^1(P^1, O_{P^1}(2a-d)) = 0$. Ținînd încă o dată cont de (11.21) deducem că extinderea (*) este trivială și deci $E \cong O_{P^1}(a) \oplus O_{P^1}(d-a)$. Q.E.D.

(11.23) Teorema (11.22) este un caz special al unui rezultat al lui Grothendieck [5] (a se vedea de asemenea Atiyah [1]), care afirmă că orice O_{P^1}-modul local liber E de rang finit este de forma $O_{P^1}(m_1) \oplus \ldots \oplus O_{P^1}(m_r)$, cu $m_1, \ldots, m_r$ numere întregi și $r = \text{rang } E$. În continuare ne va fi suficient însă acest caz particular ce se demonstrează mai simplu.

(11.24) *Referințe bibliografice*. Demonstrația teoremei (11.6) (care este esențială pentru demonstrația criteriului Noether-Tsen) este prezentată după Bucur [1]. Teorema (11.10) este o variantă a criteriului Noether-Tsen, variantă ce face (prin corolarul său (11.11)) legătura dintre suprafețele geometric riglate și fibrările vectoriale de rang 2 pe curbe nesingulare și proiective. Faptele în legătură cu fibrările vectoriale pe curbe au fost prezentate după Atiyah [1], iar demonstrația simplă a teoremei lui Grothendieck în cazul special al fibrărilor de rang 2 (11.22) este luată din Beauville [1].

§ 12.

MODELE MINIMALE DE SUPRAFEȚE RIGLATE

(12.1) Fie B o curbă proiectivă şi nesingulară şi E un O_B-modul local liber de rang 2. Fie $X = P(E)$ fibratul proiectiv asociat lui E și $f : X \to B$ proiecţia sa canonică. Dacă $x \in X$ este un punct închis ce aparţine fibrei $F_b = f^{-1}(b)$ cu $b = f(x)$, fie $\pi : \widetilde{X} \to X$ transformarea pătratică a lui X de centru punctul x. Atunci imaginea inversă proprie F' a lui F_b are proprietăţile $p_a(F') = 0$ şi $(F'^2) = -1$, deoarece $p_a(F_b) = 0$ şi $(F_b^2) = 0$. Altfel spus, F' este o curbă excepţională de prima specie. După (3.30) există atunci o unică contracţie $\pi' : \widetilde{X} \to X'$ a lui F' la un punct nesingular (ce va fi în continuare notată prin $\mathrm{cont}_{F'} : \widetilde{X} \to X'$). Cum f este un morfism şi F' este o componentă a uneia din fibrele lui $f \circ \pi$, obţinem următoarea diagramă comutativă în care f' este morfism :

$$\begin{array}{ccc} \widetilde{X} & \xrightarrow{\pi'} & X' \\ & {\scriptstyle f\circ\pi}\searrow \quad \swarrow{\scriptstyle f'} & \\ & B & \end{array}$$

În plus, toate fibrele lui f' sînt curbe integre de gen aritmetic zero, şi deci $f' : X' \to B$ este o suprafaţă geometric riglată. Aplicaţia biraţională $\pi' \circ \pi^{-1} : X \to X'$ poartă numele de transformarea elementară a suprafeţei geometric riglate $f : X \to B$ de centru punctul x, şi va fi în continuare notată prin $\mathrm{elm}_x : X \to X'$.

(12.2) Teoremă. *Fie B o curbă nesingulară şi proiectivă cu $p_a(B) > 0$. Atunci :*

a) *Dacă $f : X \to B$ este o suprafaţă geometric riglată de bază B, atunci X este model minimal.*

b) *Pentru orice model minimal X al corpului de funcții algebrice $k(B)(t)$, cu t o variabilă peste corpul funcțiilor raționale $k(B)$, există un morfism $f: X \to B$ astfel încît X să fie o suprafață geometric riglată de bază B via morfismul f.*

c) *Orice aplicație birațională între două modele minimale X și X' ale lui $k(B)(t)$ este o compunere dintre un automorfism al lui X și un număr finit de transformări elementare de tipul celor descrise la* (12.1).

Demonstrație. a) Presupunem prin absurd că ar exista pe X o curbă C excepțională de prima specie. Cum C este curbă rațională și $p_a(B) > 0$ (și B nesingulară), C este conținută în mod necesar într-o fibră a lui f, și deci C coincide cu una din fibrele lui f. Deci $(C^2) = 0$ și deci C nu ar mai fi curbă excepțională.

Punctele b) și c) ale teoremei (12.2) rezultă din următoarea:

(12.3) LEMĂ. *Fie E' un fascicul local liber de rang 2 pe curba proiectivă și nesingulară B de gen aritmetic > 0, X o suprafață și $f': X \to P(E')$ o aplicație birațională. Atunci există un produs finit de transformări elementare $g: P(E') \to P(E)$ astfel încît $g \circ f'$ să fie un morfism.*

Demonstrație. Fie $g: P(E') \to P(E)$ un produs finit arbitrar de transformări elementare, $f = g \circ f'$ și $\lambda = \lambda(f)$ numărul minim de transformări pătratice ale lui X astfel încît să obținem o suprafață Y ce domină pe X (via compunerea π a acestor transformări pătratice) și astfel încît $f \circ \pi$ să fie un morfism.

Alegem acum g astfel încît $\lambda = \lambda(f)$ să fie minim. Vom arăta că $\lambda = 0$, adică f este un morfism.

Presupunem prin absurd că $\lambda > 0$. Atunci Y conține o curbă excepțională de prima specie C astfel încît suprafața $Y' = \text{cont}_C(Y)$ să domine pe X. Dacă imaginea în $P(E)$ a lui C ar fi un punct, atunci Y' ar domina pe $P(E)$, ceea ce ar contrazice minimalitatea lui λ. Deci imaginea D a lui C în $P(E)$ este o curbă. Cum C este o curbă rațională, rezultă că D este tot o curbă rațională, și cum $p_a(B) > 0$, D este în mod necesar o fibră a lui $P(E)$. Deci $(D^2) = 0$. Dacă inversul morfismului birațional $Y \to P(E)$ nu ar avea nici un punct fundamental pe D, atunci acest morfism ar fi un izomorfism biregulat al unei vecinătăți a lui C pe o vecinătate a lui D. Însă aceasta ar contrazice egalitățile $(C^2) = -1$ și $(D^2) = 0$ Deci există pe D un punct fundamental x al inversului morfismului $Y \to P(E)$. Atunci Y domină suprafața $\text{dil}_x(P(E))$ obținută dilatînd punctul x, și deci Y domină $\text{elm}_x(P(E))$. Cum C este apli-

cată într-un punct din $\mathrm{elm}_x(P(E))$, rezultă că, Y' domină pe $\mathrm{elm}_x(P(E))$, deci $\lambda(\mathrm{elm}_X \circ g \circ f') < \lambda(g \circ f') = \lambda$, fapt ce contrazice modul de alegere al lui g. Q.E.D.

(12.4) Definiție. Vom spune că o suprafață X este *rațională* dacă X este birațional izomorfă cu planul proiectiv P^2.

Cum P^2 este birațional izomorf cu $P^1 \times P^1$, orice suprafață rațională este riglată avînd $q = 0$. Reciproc, fie X o suprafață riglată cu $q = 0$. Atunci X este birațional izomorfă cu $P^1 \times B$, cu B curbă nesingulară și proiectivă. Cum $q = \dim H^1(O_X) = \dim H^1(O_{P^1 \times B}) = \dim H^1(O_B) = p_a(B)$, rezultă $p_a(B) = 0$ și deci X este rațională.

(12.5) Vom examina acum suprafețele geometric riglate de bază $B = P^1$. Conform teoremei (11.22) orice O_{P^1}- modul local liber E de rang 2 este de forma $O_{P^1}(a) \oplus O_{P^1}(b)$, cu $a \leqslant b$ întregi. Deci $E = O_{P^1}(a) \oplus O_{P^1}(b) = O_{P^1}(a) \otimes (O_{P^1} \oplus O_{P^1}(b - a)) = L \otimes (O_{P^1} \oplus O_{P^1}(n))$ cu L inversibil și $n \geqslant 0$. Atunci $P(E) \cong P(O_{P^1} \oplus O_{P^1}(n))$ (cf. (11.11)).

În continuare vom nota prin X_n suprafața geometric riglată $P(O_{P^1} \oplus O_{P^1}(n))$ de bază P^1, cu $n \geqslant 0$, iar cu $f_n : X_n \to P^1$ proiecția sa canonică. Atunci X_n se poate interpreta ca fiind compactificata fibratului vectorial în drepte $V(O_{P^1}(n)) \to P^1$ atașat O_{P^1}-modulului inversibil $O_{P^1}(n)$ (compactificînd fiecare fibră a lui $V(O_{P^1}(n))$ cu punctul de la infinit). Avem atunci două secțiuni $\sigma_0 : P^1 \to X_n$ și $\sigma_\infty : P^1 \to X_n$ ale lui f_n, anume secțiunea nulă și secțiunea infinit ale lui f_n. Atunci fibratul conormal al lui $D_0 = \sigma_0(P^1)$ în X_n este izomorf cu $O_{P^1}(n)$, iar fibratul conormal al lui $D = \sigma_\infty(P^1)$ cu $O_{P^1}(-n)$. Deci:

$$(D_0^2) = -n \quad \text{și} \quad (D^2) = n.$$

După (11.14) orice divizor Δ pe X_n este numeric echivalent cu $aD + bF$, unde (a, b) este o pereche de numere întregi bine determinată, iar F este o fibră închisă a lui f_n. Atunci

$$(\Delta^2) = a^2(D^2) + 2ab(D.F) = a^2 n + 2ab,$$

deoarece $(D \cdot F) = 1$ și $(F^2) = 0$. Dacă Δ este divizor efectiv avem $(\Delta \cdot F) \geqslant 0$. Însă $(\Delta \cdot F) = a(D \cdot F) + b(F^2) = a$. Deci dacă Δ este efectiv și $\Delta \approxeq aD + bF$, atunci $a \geqslant 0$.

Fie Δ un divizor efectiv numeric echivalent cu $aD + bF$. Atunci din $p_a(D) = 0$, $p_a(F) = 0$, $(D^2) = n$ şi $(F^2) = 0$ deducem $(K \cdot D) = -2 - (D^2) = -2 - n$ şi $(K \cdot F) = -2$, de unde $(K \cdot \Delta) = a(-2 - n) - 2b$. Deci:

$$2p_a(\Delta) - 2 = (\Delta^2) + (K \cdot \Delta) = a^2n + 2ab - 2a - an - 2b.$$

Deoarece $\mathrm{Supp}(D_0) \cap \mathrm{Supp}(D) = \emptyset$ avem $(D_0 \cdot D) = 0$. Fie $D_0 \approx aD + bF$. Atunci $a = 1$ şi $b = -n$. Într-adevăr, $1 = (D_0 \cdot F) = a(D \cdot F) + b(F^2) = a$, deci $a = 1$. Pe de altă parte, $0 = (D_0 \cdot D) = (D^2) + b(D \cdot F) = n + b$, de unde $b = -n$. Deci:

$$D_0 \approx D - nF.$$

Dacă Δ este un divizor efectiv ce nu conţine pe D_0 drept componentă, atunci dacă $\Delta \approx aD + bF$, avem şi $b \geqslant 0$. Într-adevăr, $0 \leqslant (\Delta \cdot D_0) = a(D \cdot D_0) + b(F \cdot D_0) = b$. De aici rezultă că dacă Δ este o curbă integră pe X_n, atunci nu putem avea $(\Delta^2) < 0$ decît dacă $n > 0$ şi $\Delta = D_0$. Într-adevăr, dacă $\Delta \neq D_0$, atunci $\Delta \approx aD + bF$, cu $a \geqslant 0$ şi $b \geqslant 0$, deci $(\Delta^2) = a^2n + 2ab \geqslant 0$, iar dacă $\Delta = D_0$, avem $(D_0^2) = -n$. Cum $p_a(D_0) = 0$, am obţinut:

(12.6) LEMĂ. *Suprafeţele X_n sînt modele minimale ale lui P^2 pentru orice $n \neq 1$ şi $n \geqslant 0$, iar dacă $n > 0$ singura curbă integră Δ pe X_n cu proprietatea $(\Delta^2) < 0$ este D_0. Suprafaţa X_1 conţine o curbă excepţională de prima specie, anume D_0, iar* $\mathrm{cont}_{D_0}(X_1)$ *este biregulat izomorfă cu P^2. Suprafaţa X_0 este biregulat izomorfă cu $P^1 \times P^1$.*

Pînă acum am folosit deja următoarele două notaţii: dacă E este o curbă excepţională de prima specie pe suprafaţa X, atunci prin $\mathrm{cont}_E(X)$ am notat suprafaţa obţinută din X contractînd E la un punct nesingular (cf. (3.30)), iar dacă $x \in X$ este un punct închis pe suprafaţa X, atunci prin $\mathrm{dil}_x(X)$ am notat suprafaţa obţinută dilatînd punctul x. Dacă E este o curbă excepţională de prima specie ce se contractă la punctul $y \in Y = \mathrm{cont}_E(X)$, atunci aplicaţiile biraţionale $\mathrm{cont}_E : X \to Y$ şi $\mathrm{dil}_Y : Y \to X$ sînt deci inverse una alteia. Am mai introdus transformarea elm_x care transformă o suprafaţă geometric riglată de bază B într-o altă suprafaţă geometric riglată de bază B. Transformarea elm_x a fost numită transformarea elementară de centru x. În fine, vom nota prin $\mathrm{refl} : X_0 = P^1 \times P^1 \to X_0$ morfismul $(x, y) \mapsto (y, x)$.

Fie acum $x \in X_0$. Este imediat de văzut că $\mathrm{elm}_x(X_0) = X_1$. Dacă $n \geqslant 1$, fie $x \in X_n$ şi fie F fibra lui f ce trece prin punctul x. Deosebim două cazuri:

a) $x \in F \cap D_0$. Atunci $\text{elm}_x(X_n) = X_{n+1}$. Într-adevăr, considerînd figura 9, avem:

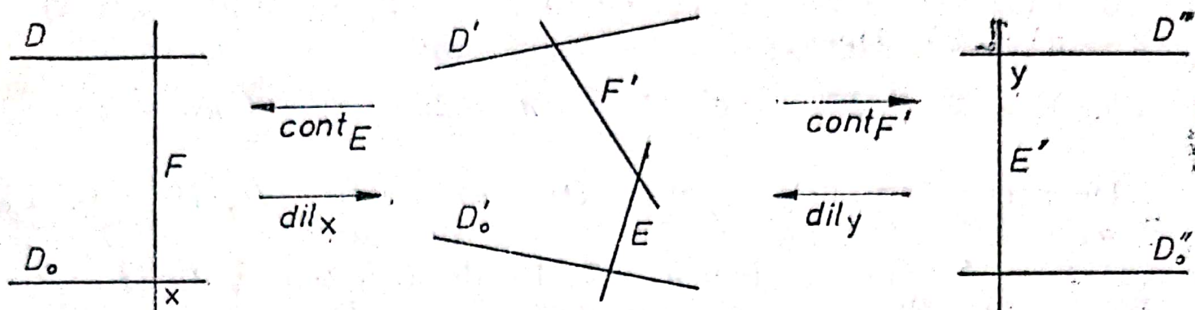


Figura 9

$(D_0'^2) = -n-1$, $(D'^2) = n$, $(D_0''^2) = -n-1$, $(D''^2) = n+1$ și cum $\text{elm}_x(X_n)$ este una din suprafețele X_m, avem $m = n+1$.

b) $x \notin F \cap D_0$. Fără a restrînge generalitatea putem presupune $x \in F \cap D$ (deoarece putem schimba punctul de la infinit al lui P^1 păstrînd pe 0 neschimbat). Atunci avem $\text{elm}_x(X_n) = X'_{n-1}$. Într-adevăr, din figura 10 deducem:

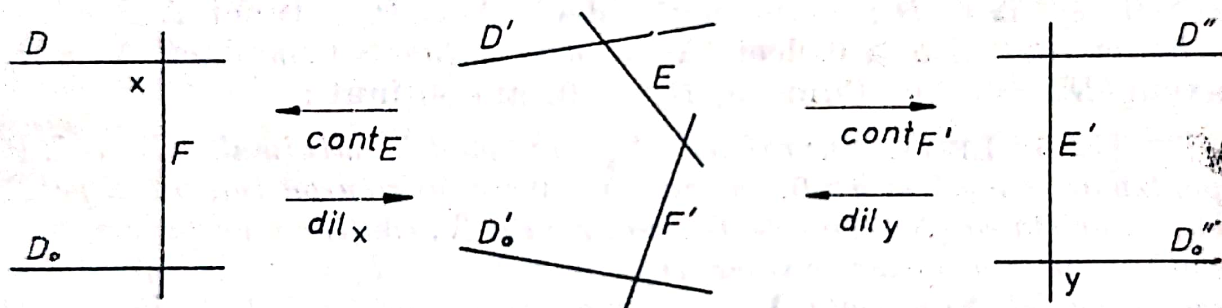


Figura 10

$(D'^2) = n-1$, $(D_0'^2) = -n$, $(D''^2) = n-1$, $(D_0''^2) = -n+1$. Cum $\text{elm}_x(X_n)$ este una din suprafețele X_m, rezultă că $m = n-1$.

Deci am demonstrat

(12.7) Propoziție. *Dacă $m \neq n$ sînt întregi ≥ 0, există o aplicație birațională $g: X_m \to X_n$ care este o compunere de transformări elementare.*

(12.8) Teoremă. (Nagata). *Orice model minimal al corpului $k(t_1, t_2)$, cu t_1 și t_2 variabile peste k, este izomorf fie cu P^2, fie cu una din suprafețele X_n cu $n \geq 0$ și $n \neq 1$.*

Pentru demonstrația teoremei (12.8) avem nevoie de mai multe leme.

(12.9) Lemă. *În notațiile de mai sus fie $f_0 : X \to X_{n_0}$ un morfism birațional de suprafețe ($n_0 \geq 0$) și fie C o curbă nesingulară pe X. Există un produs finit $g: X_{n_0} \to X_n$ de transformări elementare generalizate (vezi definiția (12.10)) astfel încît $g \circ f_0 = f$ este*

un morfism și astfel încît curba $C' = f(C)$ are următoarele proprietăți dacă $C' \approxeq aD + bF$:

a) *Fiecare punct singular al lui C' are multiplicitatea $\leqslant a/2$*

b) *Dacă $n = 0$, atunci $a \leqslant b$.*

c) *Dacă $n = 1$, atunci orice punct singular al lui C' are multiplicitatea $\leqslant b$.*

d) *Dacă $a = 1$, atunci $(C^2) = (C'^2)$.*

e) *Dacă $n = 1$, $a = 2$ și $b = 0$, atunci $(C^2) = (C'^2)$.*

(12.10) Definiție. Prin *transformare elementară generalizată* înțelegem una din următoarele transformări: elm_x, $\mathrm{refl}: X_0 \to X_0$ sau $\mathrm{int}_x: X_1 \to X_1$, unde $x \notin D_0$ și $\mathrm{int}_x = \mathrm{cont}_{D_0} \circ \mathrm{dil}_x$.

Demonstrația lemei (12.9). Dacă $f_0(C)$ este un punct $x \in X_{n_0}$, atunci f_0 domină $\mathrm{dil}_x(X_{n_0})$, deci și pe $\mathrm{elm}_x(X_{n_0})$. Dacă $f_1(C)$ este un punct, unde $f_1 = \mathrm{elm}_x \circ f_0$, atunci repetînd procedeul de mai sus, găsim o compunere $g: X_{n_0} \to X_n$ de transformări elementare astfel încît $g \circ f_0$ este morfism și $(g \circ f_0)(C)$ este o curbă pe X. (Dacă prin absurd $(g \circ f_0)(C)$ ar fi un punct pentru orice compunere g de transformări elementare, atunci X ar domina un număr oricît de mare de dilatări succesive de puncte, lucru evident imposibil.)

Dintre toate compunerile g de transformări elementare cu proprietățile $g \circ f_0$ este morfism și $(g \circ f_0)(C)$ este curbă, alegem un g astfel încît $a = a((g \circ f_0)(C))$ $((g \circ f_0)(C) \approxeq aD + bF)$ să fie minim. Acest lucru este totdeauna posibil deoarece am văzut mai sus că $a \geqslant 0$. Dintre toate compunerile g cu $a((g \circ f_0)(C))$ minim alegem un g cu proprietatea că autointersecția lui $(g \circ f_0)(C)$ este minimă. Acest lucru este posibil deoarece $g \circ f_0$ fiind morfism birațional, avem $(C^2) \leqslant ((g \circ f_0)(C)^2)$. Notăm atunci prin $f = g \circ f_0$ și vom arăta că f are toate proprietățile cerute. Fie $f: X \to X_n$.

a) Dacă $C' = f(C)$ are o singularitate în punctul x de multiplicitate $r > a/2$, aplicăm elm_x. Deoarece C este curbă nesingulară iar x este singularitate pentru C', f domină $\mathrm{dil}_x(X_n)$, deci $\mathrm{elm}_x \circ f$ este morfism. Situația este reprodusă în figura 11.

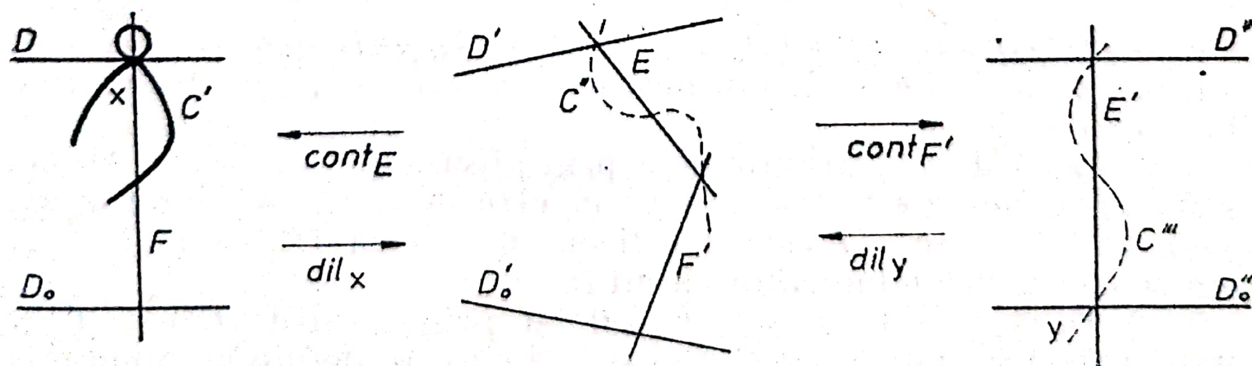


Figura 11

Calculînd numerele de intersecţie avem, ţinînd cont de Şafarevici [1], cap. IV, § 3, din partea I: $(C'^2) = (C''^2) + r^2 = (C'''^2) + r'^2$, unde r' este multiplicitatea inelului local $O_{C''', y}$. Însă $r = (E \cdot C'')$ şi $r' = (F' \cdot C'')$ şi deci:

$r + r' = (E + F' \cdot C'') = (\text{cont}_E^{-1}(F) \cdot C'') = (\text{cont}_E^{-1}(F) \cdot C'' + E) - (\text{cont}_E^{-1}(F) \cdot E) = (\text{cont}_E^{-1}(F) \cdot \text{cont}_E^{-1}(C')) - (E + F' \cdot E) = (F \cdot C') - (E^2) - (F' \cdot E) = (F \cdot C') = (F \cdot aD + bF) = a$.

Cum $r > a/2$, $r' < a/2$ şi deci $r' < r$. Ţinînd cont de primele relaţii, avem $(C'^2) - r^2 + r'^2 = (C'''^2)$, şi deoarece $r' < r$, obţinem $(C'''^2) < (C'^2)$, fapt ce contrazice minimalitatea lui (C'^2), deoarece se verifică imediat că $a(C''') = a(C') = a$.

b) Dacă $n = 0$, atunci considerînd refl $\circ f$ vedem că rolurile lui a şi b se schimbă între ele. Din minimalitatea lui a deducem că $a \leqslant b$.

c) Dacă $n = 1$, fie x un punct singular al lui C' de multiplicitate r. Dacă $x \in D_0$ avem în mod evident $r \leqslant (C' \cdot D_0) = (C' \cdot D - F) = (C' \cdot D) - (C' \cdot F) = (aD + bF \cdot D) - (aD + bF \cdot F) = a(D^2) + b(F \cdot D) - a(D \cdot F) - b(F^2) = b$.

Dacă $x \notin D_0$, considerăm $f_1 = \text{int}_x \circ f$. Fie f fibra lui $X_n \to P^1$ ce conţine pe x, şi $y = D_0 \cap F$. Situaţia este reprezentată în figura 12.

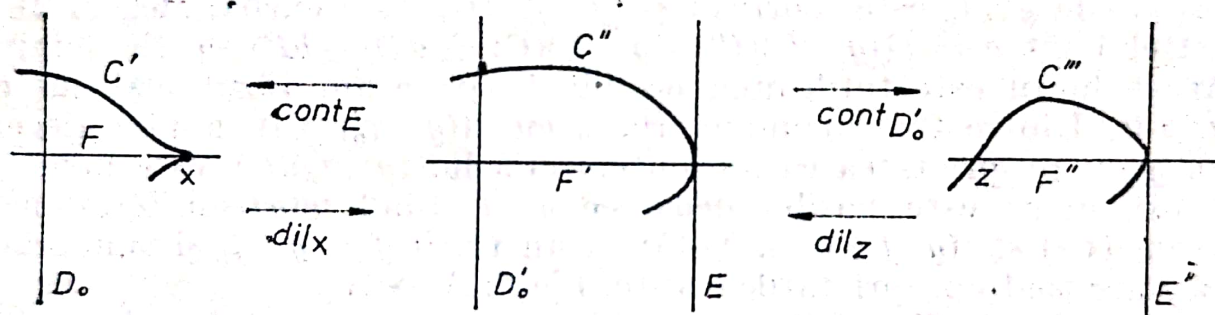


Figura 12

Avem succesiv: $a = (C' \cdot F)$, $(C'' \cdot F') = (C' \cdot F) - r = a - r$, $(C'' \cdot F') = (F'' \cdot C''')$ — multiplicitatea lui C'' în $z = \text{cont}_{D'_0}(D'_0)$ $= a' - (C'' \cdot D'_0) = a' - (D_0 \cdot C') = a' - (D_0 \cdot aD + bF) = a' - b$. Obţinem $a - r = a' - b$, sau încă $a' = a + b - r$, şi cum $a' \geqslant a$, obţinem $r \leqslant b$.

d) Dacă $a = 1$, presupunem prin absurd $(C^2) < (C'^2)$. Atunci există un punct $x \in C'$ în care f^{-1} nu este definită. Aplicînd elm_x, găsim că $f_1 = \text{elm}_x \circ f$ este morfism, $a_1 = a$ şi $(C_1^2) = (C'^2) - 1$, ceea ce contrazice minimalitatea lui (C'^2).

e) Dacă $n = 1$, $a = 2$, $b = 0$ şi prin absurd $(C^2) < (C'^2)$, atunci există un punct $x \in C'$ în care f^{-1} nu este definită. Punctul x nu se poate afla pe D_0 deoarece $b = (C' \cdot D_0) = 0$ (deci C' nu taie

pe D_0). Aplicînd int_x găsim $a' = a + b - 1 = 1$ (deoarece după c) curba C' nu are singularități) și astfel se contrazice minimalitatea lui a. Q.E.D.

(12.11) LEMĂ. *Fie C o curbă ireductibilă pe suprafața X și fie $f : X \to X_n$ un morfism birațional avînd proprietățile* a), b), c), d) *și* e) *din lema* (12.9). *Atunci*:

i) *Dacă $a = 2$, C este nesingulară de gen g și $(C^2) \leqslant 4g + 4$.*

ii) *Dacă $a = 3$, C este nesingulară de gen g și $(C^2) \leqslant 3g + 6$.*

iii) *Dacă $a \geqslant 4$ și $n \neq 1$, sau $a \geqslant 4$, $n = 1$ și $b \geqslant a/2$, atunci $(C^2) \leqslant 2a/(a-2) \cdot (p_a(C) - 1)$.*

iv) *Dacă $a \geqslant 4$, $n = 1$ și $b < a/2$, atunci $(C^2) < 2k/(k-3)(p_a(C) - 1)$, unde $k = a + b$.*

Demonstrație. Considerăm la început cazul $X = X_n$ și $f = 1_{X_n}$. Atunci ținînd cont de (12.5) avem:

$$(C^2) = a^2n + 2ab \text{ și } 2p_a(C) - 2 = a^2n + 2ab - 2a - an - 2b.$$

i) Dacă $a = 2$, C este nesingulară după a) și avem:

$$(C^2) = 4n + 4b,\ 2p_a(C) = 2n + 2b - 4, \text{ deci } (C^2) = 2g + 4 \leqslant 4g + 4.$$

ii) Dacă $a = 3$, C este nesingulară după a) și avem:

$$(C^2) = 9n + 6b,\ 2p_a(C) - 2 = 6n + 4b - 6, \text{ deci } (C^2) =$$

$$= 3p_a(C) + 6 = 3g + 6.$$

iii) Dacă $a \geqslant 4$, atunci

$$2p_a(C) = (a-1)(an + 2b - 2) \geqslant 3(4n + 2b - 2).$$

Dacă $n = 0$, atunci după b) avem $b \geqslant a \geqslant 4$, deci $3(4n + 2b - 2) \geqslant 18$.

Dacă $n > 0$, deoarece $b \geqslant -n$ avem $4n + 2b - 2 \geqslant 2n - 2 \geqslant 2$. Deci în toate cazurile obținem $p_a(C) > 1$. Putem deci considera

$$\frac{(C^2)}{2p_a(C) - 2} = \frac{a}{a - 1 - u}, \quad \text{cu } u = \frac{2a}{an + 2b}.$$

Dacă arătăm că $u \leqslant 1$, atunci avem $a/(a-1-u) \leqslant \leqslant a/(a-2)$, de unde concluzia lui iii).

Dacă $n = 0$, din b) deducem $a \leqslant b$ şi deci $u = 2a/2b = a/b \leqslant 1$. Dacă $n = 1$, atunci prin ipoteză $b \geqslant a/2$ şi deci $u=2a/(a+2b) \leqslant \leqslant 2a/3a \leqslant 1$. Dacă $n > 1$, curba C nu poate coincide cu D_0 deoarece $p_a(C) > 0$, de unde $b \geqslant 0$, sau încă $u \leqslant 1$.

iv) Dacă $a \geqslant 4$ şi $n = 1$, avem:

$$2p_a(C) - 2 = a(a-3) + 2b(a-1) \geqslant 4,$$

şi deci are sens să considerăm expresia $(C^2)/(2p_a(C) - 2)$. Înlocuind $a = k - b$ găsim:

$$\frac{(C^2)}{2p_a(C) - 2} = \frac{k}{k - 3 - v}, \qquad \text{unde } v = \frac{kb - 3b^2}{k^2 - b^2}.$$

Presupunînd $b < a/2$ avem $3b < k$ şi deci $v > 0$. Deci

$$(C^2) < 2k/(k-3)(p_aC) - 1).$$

ceea ce probează lema (12.11) în cazul $X = X_n$ şi $f = 1_{X_n}$.

În cazul general vom utiliza inducţie după numărul de transformări pătratice ce trebuie aplicate pentru a obţine pe f. Ne reducem deci la a demonstra că dacă $X = \mathrm{dil}_x(X')$ cu $x \in X'$ şi D este imaginea lui C prin $(\mathrm{dil}_x)^{-1}$ şi teorema este valabilă pentru D, atunci ea este valabilă şi pentru C.

i) şi ii). Deoarece D este nesingulară, C este de asemenea nesingulară şi de acelaşi gen cu C şi $(C^2) \leqslant (D^2)$.

iii) Fie $r \geqslant 0$ multiplicitatea punctului x pe curba C($r = 0$ înseamnă că $x \notin C$). Atunci

$$(C^2) = (D^2) - r^2 \text{ şi } p_a(C) = p_a(D) - 1/2 \cdot r(r-1).$$

şi deci

$$(C^2) \leqslant 2a/(a-2) \cdot (p_a(C) - 1) + a/(a-2) \cdot r(r-1) - r^2.$$

Însă după condiţia a) avem $r \leqslant a/2$ şi deci

$$a/(a-2) \cdot r(r-1) - r^2 = r/(a-2)\,(2r-a) \leqslant 0,$$

ceea ce implică concluzia.

iv) Avem :

$$(C^2) = 2k/(k-3) \cdot (p_a(C) - 1) + k/(k-3) \cdot r(r-1) - r^2 .$$

După condiția c) avem $r \leqslant n$, și deci $r \leqslant k/3$ și

$$k/(k-3)\, r(r-1) - r^2 = r/(k-3) \cdot (3r-k)) \leqslant 0,$$

ceea ce implică concluzia. Q.E.D.

Ca să demonstrăm teorema (12.8) va fi suficient să probăm :

(12.12) LEMĂ. *Fie X o suprafață și $f_0 : X \to X_{n_0}$ o aplicație birațională. Atunci sau există un produs $g : X_{n_0} \to X_n$ de transformări elementare generalizate astfel încît $f = g \circ f_0$ este morfism, sau $X \cong P^2$ și există un produs $g : X_{n_0} \to X_1$ de transformări elementare generalizate astfel încît, dacă $f = g \circ f_0$, să avem $f = \mathrm{dil}_x \circ h$, unde $x \in X$ și h este un automorfism (biregulat) al lui X.*

Demonstrație. Considerăm toate aplicațiile biraționale $f = g \circ f_0$, cu $g : X_{n_0} \to X_n$ produse de transformări elementare generalizate. Pentru un astfel de f fie $\lambda(f)$ numărul minim de transformări pătratice ce trebuie aplicate lui X pentru a obține o suprafață ce domină pe X_n. Alegem un g astfel încît $\lambda(f)$ să fie minim. Vom arăta că $\lambda(f) = 0$ (adică f este morfism), sau $\lambda(f) = 1$, $X = P^2$ și $n = 1$.

Presupunem $\lambda(f) > 0$. Aplicăm $\lambda(f)$ transformări pătratice lui X și obținem o suprafață Y ce domină pe X_n. Fie C o curbă excepțională de prima specie pe Y astfel încît $\mathrm{cont}_C(Y)$ să domine pe X. După lema (12.9) putem presupune că morfismul (obținut compunînd pe f cu cele $\lambda(f)$ transformări pătratice) $\varphi : Y \to X_n$ are proprietățile a), b), c), d) și e). Fie $C' = \varphi(C)$.

Cazul $a = 0$. Atunci $C' \approx bF$ cu $b > 0$, de unde C' este o curbă nesingulară cu $(C)'^2 = 0$. Cum $(C^2) = -1$, există un punct $x \in C'$ în care φ^{-1} nu este definită. Atunci $\mathrm{cont}_C(Y)$ domină $\mathrm{elm}_x(X_n)$, ceea ce contrazice minimalitatea lui $\lambda(f)$.

Cazul $a = 1$. După d) avem $(C^2) = (C'^2) = -1$, deci în mod necesar avem $n = 1$, $C' = D_0$ (cf. (12.6)). Dacă φ este izomorfism, atunci $X = P^2$, $\lambda(f) = 1$. Dacă φ nu ar fi izomorfism ar exista un $x \in X_1 - D_0$ astfel încît $\mathrm{cont}_C(Y)$ să domine $\mathrm{int}_x(X_1)$, ceea ce ar contrazice minimalitatea lui $\lambda(f)$.

Cazul $a = 2$. După a) C' este nesingulară, și cum C este rațională, avem $p_a(C') = 0$. Din formula ce exprimă $p_a(C')$ în funcție de a, b și n obținem $b + n = 1$. Deci sau $n = 0$ și $b = 1$ (ceea

ce este imposibil după b)), sau $n = 1$ şi $b = 0$. Deoarece $(C'^2) = 4 > 0$, această ultimă alternativă este imposibilă ţinînd cont de e).

Cazul $a = 3$. După a) C' este nesingulară, deci, ca mai sus, avem $p_a(C') = 0$ şi $3n + 2b = 0$. Deci $n = 0$ şi $b = 1$, ceea ce după b) este imposibil.

Cazul $a \geqslant 4$. Atunci ne găsim fie în cazul iii), fie în cazul iv) al lemei (12.11).

Dacă avem iii), deducem $(C^2) \leqslant -2a/(a-2)$, iar dacă avem iv), $(C^2) \leqslant -2k/(k-3)$. Ambele inegalităţi contrazic însă faptul că $(C^2) = -1$. Q.E.D.

Prin această teorema (12.8) este demonstrată.

(12.13) *Referinţe bibliografice.* Paragraful de faţă se bazează pe Hartshorne [4]. Cu toate că teoremele (12.2) şi (12.8) se vor deduce în paragraful următor şi în alt mod (via clasificarea suprafeţelor), am preferat să prezentăm şi aceste demonstraţii directe şi elementare.

§ 13.

CARACTERIZAREA SUPRAFEȚELOR RIGLATE ȘI RAȚIONALE

Ținînd cont de (9.3) și de demonstrația lui (8.3) a) avem :

(13.1) PROPOZIȚIE. *Următoarele afirmații sînt echivalente pentru o suprafață minimală* X :

a) *Există o curbă integră* C *pe* X *astfel încît* $(K \cdot C) < 0$, *altfel spus,* X *aparține clasei* a) (*cf.* (8.2)).

b) *Adjuncția pe* X *se termină, adică pentru orice divizor* $D \in \in \mathrm{Div}(X)$ *există un întreg* n_D *astfel încît* $|D + nK| = \emptyset$ *pentru orice* $n \geqslant n_D$.

c) $c(X) = -1$, *adică* $p_n = 0$ *pentru orice* $n \geqslant 1$.

d) $p_{12} = 0$.

Scopul acestui paragraf este studiul suprafețelor minimale X ce satisfac una din proprietățile echivalente a), b), c) sau d) din propoziția (13.1). Exemple de asemenea suprafețe avem deja la îndemînă : anume suprafețele riglate minimale (cf. propoziția (11.15)). Rezultatele principale ale acestui paragraf sînt :

(13.2) TEOREMĂ. (Enriques). *Fie* X *o suprafață minimală.* X *este suprafață riglată dacă și numai dacă una din condițiile echivalente* a), b), c) sau d) *din propoziția* (13.1) *este verificată.*

(13.3) TEOREMĂ. (Castelnuovo). *Fie* X *o suprafață minimală. Atunci* X *este suprafață rațională dacă și numai dacă* $q = p_2 = 0$.

Studiul suprafețelor riglate este strîns legat de studiul familiilor de curbe raționale. Dacă D este un divizor efectiv pe X, atunci izomorfismul $O_X(K + D) \otimes O_D = \omega_D$ sugerează că divizorii efectivi D cu proprietatea $|K + D| = \emptyset$ trebuie să fie puși în legătură cu familiile de curbe raționale de pe X, deoarece o curbă integră D de pe X este rațională dacă și numai dacă $|\omega_D| = \emptyset$. Pe o suprafață minimală X ce verifică una din condițiile echivalente a), b), c), sau

d) din (13.1) existenţa unor asemenea divizori efectivi D cu proprietatea $|K+D|=\emptyset$ este asigurată de condiţia b). Începem prin a studia aceşti divizori.

(13.4) PROPOZIŢIE. *Fie X o suprafaţă minimală şi D un divizor efectiv pe X cu proprietatea $|K+D|=\emptyset$. Atunci $p_g=0$ şi morfismul natural $\underline{\mathrm{Pic}}^0_X \to \underline{\mathrm{Pic}}^0_D$ de scheme Picard este surjectiv, iar $\underline{\mathrm{Pic}}^0_D$ este varietate abeliană.*

Demonstraţie. Deoarece $|K| \subseteq |K+D| = \emptyset$ (D este efectiv) avem $p_g=0$. Pe de altă parte, condiţia $|K+D|=\emptyset$ se interpretează via dualitatea Serre prin $H^2(O_X(-D))=0$, şi deci din şirul exact

$$0 \to O_X(-D) \to O_X \to O_D \to 0$$

deducem că omomorfismul natural $H^1(O_X) \to H^1(O_D)$ este surjectiv. Deoarece $p_g=0$, schema Picard $\underline{\mathrm{Pic}}^0_X$ este redusă (vezi Mumford [1], lecţia 27), deci $\underline{\mathrm{Pic}}^0_X$ este o varietate abeliană. Cum $H^1(O_X)$ (resp. $H^1(O_D)$) se identifică cu spaţiul tangent în origine la $\underline{\mathrm{Pic}}^0_X$ (resp. la $\underline{\mathrm{Pic}}^0_D$), deducem că $\underline{\mathrm{Pic}}^0_X \to \underline{\mathrm{Pic}}^0_D$ este morfism surjectiv, şi deoarece $\underline{\mathrm{Pic}}^0_X$ este varietate abeliană, rezultă că $\underline{\mathrm{Pic}}^0_D$ este de asemenea varietate abeliană. Q.E.D.

(13.5) PROPOZIŢIE. *Fie $D=\sum_{i=1}^{r} n_iE_i$ un divizor efectiv pe suprafaţa minimală X cu proprietatea $|K+D|=\emptyset$, unde $n_i \geqslant 1$, E_i este curbă integră, iar dacă $i \neq j$, atunci $E_i \neq E_j$. Atunci:*

i) *Fiecare curbă E_i este nesingulară şi $\sum_{i=1}^{r} p_a(E_i) \leqslant q$.*

ii) *$\{E_i\}_i$ este o configuraţie conexă de curbe care nu are bucle.*

iii) *Dacă $n_i \geqslant 2$, atunci are loc una din situaţiile:*

a) *E_i este curbă raţională,*

b) $(E_i^2) < 0$.

c) *E_i este curbă eliptică, $(E_i^2)=0$, iar fibratul normal al lui E_i în X este netrivial.*

Demonstraţie. i) Deoarece $|K+E_i| \subseteq |K+D| = \emptyset$, din (13.4) avem că $\underline{\mathrm{Pic}}^0_X \to \underline{\mathrm{Pic}}^0_{E_i}$ este morfism surjectiv şi $\underline{\mathrm{Pic}}^0_{E_i}$ este varietate abeliană. Deci E_i este nesingulară. Într-adevăr, dacă E_i ar avea singularităţi, fie $\tilde{E}_i$ normalizata lui E_i. Folosind teorema de structură a schemelor Picard pentru curbe avem că $\underline{\mathrm{Pic}}^0_{E_i}$ este o extindere a lui $\underline{\mathrm{Pic}}^0_{\tilde{E}_i}$ printr-un subgrup afin netrivial, combinaţie de gru-

puri aditive G_a sau de grupuri multiplicative G_m (vezi Serre [3] cap. V, sau Oort [1]). Însă $\underline{\mathrm{Pic}}^0_{E_i}$ fiind varietate abeliană, nu putem avea subgrupuri afine ale lui $\underline{\mathrm{Pic}}^0_{E_i}$ netriviale. Deci $\tilde{E}_i = E_i$.

Asemănător, $|K + D'| \subseteq |K + D| = \emptyset$, unde $D' = \sum_{i=1}^{r} E_i$, şi din (13.4) rezultă că $\underline{\mathrm{Pic}}^0_{D'}$ este varietate abeliană. Deci D' (şi deci D) este curbă conexă, iar intersecţia oricăror două componente E_i şi E_j (cu $i \neq j$ şi $E_i \cap E_j \neq \emptyset$) este transversală, deoarece altminteri $\underline{\mathrm{Pic}}^0_{D'}$ ar conţine subgrupuri afine izomorfe cu G_m (vezi de exemplu discuţia de la (3.4.4)). Şirul exact (3.4.2)

$$0 \to O_{D'} \to \prod_{i=1}^{r} O_{E_i} \to F \to 0$$

arată că $\dim H^1(O_{D'}) \geqslant \sum_{i=1}^{r} \dim H^1(O_{E_i}) = \sum_{i=1}^{r} p_a(E_i)$. Însă deoarece $|K + D'| = \emptyset$, avem $H^2(O_X(-D')) = 0$ şi deci omomorfismul de restricţie $H^1(O_X) \to H^1(O_{D'})$ este surjectiv, de unde inegalitatea

$$\sum_{i=1}^{r} p_a(E_i) \leqslant \dim H^1(O_X) = q.$$

ii) Dacă D ar conţine o buclă, atunci $\underline{\mathrm{Pic}}^0_D$ ar conţine un subgrup izomorf cu G_m, lucru imposibil într-o varietate abeliană.

iii) Dacă $n_i \geqslant 2$, atunci $|K + 2E_i| \subseteq |K + D| = \emptyset$, şi deci $\underline{\mathrm{Pic}}^0_{2E_i}$ este varietate abeliană după (13.4). De aici rezultă că morfismul natural $\underline{\mathrm{Pic}}^0_{2E_i} \to \underline{\mathrm{Pic}}^0_{E_i}$ este izomorfism.

Într-adevăr, considerăm şirurile exacte:

$$0 \to I = O_{E_i}(-E_i \cdot E_i) \to O_{2E_i} \to O_{E_i} \to 0$$

$$0 \to I \xrightarrow{\alpha} O^*_{2E_i} \to O^*_{E_i} \to 1$$

($I^2 = 0$ şi $\alpha(x) = 1 + x$). Al doilea şir induce şirul exact de coomologie

$$0 \to H^1(I) \to \mathrm{Pic}(2E_i) \to \mathrm{Pic}(E_i)$$

sau încă

$$0 \to H^1(I) \to \text{Pic}^0(2E_i) \to \text{Pic}^0(E_i).$$

Dacă $H^1(I)$ ar fi nenul, $\underline{\text{Pic}}^0_{2E_i}$ ar conţine un subgrup afin izomorf cu G_a, lucru imposibil într-o varietate abeliană. Deci $H^1(I) = 0$. Acum şirul exact de coomologie asociat primului şir implică :

$$0 = H^1(I) \to H^1(O_{2E_i}) \to H^1(O_{E_i}),$$

şi deci aplicaţia tangentă în origine la $\underline{\text{Pic}}^0_{2E_i} \to \underline{\text{Pic}}^0_{E_i}$ este izomorfism, de unde afirmaţia că $\underline{\text{Pic}}^0_{2E_i} \to \underline{\text{Pic}}^0_{E_i}$ este izomorfism.

În particular am dovedit şi că $H^1(O_{E_i}(-E_i \cdot E_i)) = 0$. Dacă $(E_i^2) \geqslant 0$, atunci cum $\deg_{E_i}(O_{E_i}(-E_i \cdot E_i)) = -(E_i^2) \leqslant 0$, rezultă că E_i este sau curbă raţională, sau curbă eliptică şi $(E_i^2) = 0$ sau 1. Dacă E_i este curbă eliptică şi $(E_i^2) = 0$, atunci este clar că $O_{E_i}(-E_i \cdot E_i) \not\cong O_{E_i}$, iar dacă E_i este curbă eliptică şi $(E_i^2) = 0$, atunci din $H^1(O_{E_i}(-E_i \cdot E_i)) = 0$ rezultă din nou că $O_{E_i}(-E_i \cdot E_i) \not\cong O_{E_i}$. Q.E.D.

(13.6) Propoziţie. *Fie X o suprafaţă, $x_1, \ldots, x_n$ n puncte închise distincte două câte două şi $D \in \text{Div}(X)$ un divizor astfel încât* $\dim |D| \geqslant 3n$. *Atunci există un divizor $D' \in |D|$ astfel încît fiecare x_i aparţine lui D' şi este punct multiplu al lui D'.*

Demonstraţie. Considerăm şirul exact

$$0 \to O_X(D) \otimes I_1 \otimes \ldots \otimes I_n \to O_X(D) \to \bigoplus_{i=1}^{n} k(x_i)^3 \to 0,$$

unde $(I_i)_z = O_{X,z}$ dacă $z \neq x_i$ şi $(I_i)_{x_i} = m^2_{X,x_i}$ (observăm că $\dim O_{X,x_i}/m^2_{X,x_i} = 3$). Din şirul exact de coomologie

$$0 \to H^0(O_X(D) \otimes I_1 \otimes \ldots \otimes I_n) \to H^0(O_X(D)) \to \bigoplus_{i=1}^{n} k(x_i)^3$$

deducem că $H^0(O_X(D) \otimes I_1 \otimes \ldots \otimes I_n) \neq 0$, deoarece $\dim H^0(O_X(D)) > 3n$ prin ipoteză, iar $\dim \bigoplus_{i=1}^{n} k(x_i)^3 = 3n$. Fie deci s o secţiune nenulă din $H^0(O_X(D) \otimes I_1 \otimes \ldots \otimes I_n)$. Atunci $D' = \text{div}_X(s)$ satisface condiţiile cerute. Q.E.D.

(13.7) PROPOZIȚIE. *Fie X o suprafață minimală cu $q=0$ și fie C o curbă rațională pe X astfel încît $(K.C)<0$ și $|K+C| = \emptyset$. Atunci X este sau o suprafață geometric riglată peste P^1, sau este izomorfă cu P^2. Morfismul de riglare este de forma $\varphi_{|C|}$ unde C este o curbă rațională pe X astfel încît $(K.C)<0$ și $|K+C| = \emptyset$.*

Demonstrație. Deoarece X este minimală și $(K \cdot C)<0$, $(C^2)\geqslant 0$. Fie

$$a = \min \{(C^2) | C \text{ rațională}, \ (C^2) \geqslant 0 \text{ și } |K+C| = \emptyset\}.$$

Dacă notăm prin $\mathscr{C}$ mulțimea tuturor curbelor (integre) raționale cu $(C^2) = a$ și $|K+C| = \emptyset$, și dacă H este o secțiune hiperplană pe X, fie

$$b = \min \{(C \cdot H) | C \in \mathscr{C}\}.$$

Fixăm o curbă $C \in \mathscr{C}$ cu $(C \cdot H) = b$. Arătăm că fiecare element al lui $|C|$ este o curbă rațională nesingulară. Fie $D = \sum_{i=1}^{r} n_i E_i \in |C|$. $n_i \geqslant 1$, E_i integră și $E_i \neq E_j$ pentru $i \neq j$. Avem.

$$0 > (C \cdot K) = (D \cdot K) = \sum_{i=1}^{r} n_i (K \cdot E_i),$$

de unde $(K \cdot E_i) < 0$ pentru cel puțin un indice i. Cum X este minimală avem atunci $(E_i^2) \geqslant 0$, și deoarece $|K+D| = |K+C| = \emptyset$, E_i este curbă rațională nesingulară conform lui (13.5) i) avînd proprietatea $|K+E_i| = \emptyset$. Rezultă $(E_i^2) \geqslant a$ și în plus avem:

$$a = (D^2) = \sum_{j=1}^{r} n_j (C \cdot E_j) \geqslant n_i (C \cdot E_i) = n_i \sum_{h=1}^{r} n_h (E_h \cdot E) \geqslant$$
$$\geqslant n_i^2 (E_i^2) \geqslant n_i^2 a.$$

Deducem $n_i = 1$ și $E_i \in \mathscr{C}$. De asemenea avem:

$$(H \cdot E_i) \geqslant b = (H \cdot C) = (H \cdot E_i) + \sum_{h \neq i} n_h (H \cdot E_h).$$

Deoarece $(H \cdot E_h) > 0$ pentru orice h, rezultă $r = 1$, deci $D = E_i$. Altfel spus, am arătat că fiecare $D \in |C|$ este curbă rațională nesingulară. Ținînd cont de (13.6) avem $\dim |C| \leqslant 2$.

Din şirul exact

$$0 \to O_X \to O_X(C) \to O_X(C) \otimes O_C \to 0$$

deducem şirul exact de coomologie

$$0 \to H^0(O_X) \to H^0(O_X(C)) \to H^0(O_X(C) \otimes O_C) \to H^1(O_X) = 0.$$

Cum $\deg_C(O_X(C) \otimes O_C) = (C^2)$ şi $C \cong P^1$, avem $\dim H^0(O_X(C) \otimes \otimes O_C) = 1 + (C^2)$, de unde $\dim H^0(O_X(C)) = 2 + (C^2)$, sau încă $\dim |C| = 1 + (C^2)$. Cum am văzut că $\dim |C| \leqslant 2$ şi cum $(C^2) \geqslant 0$, avem două posibilităţi : $(C^2) = 0$ sau $(C^2) = 1$. Totodată observăm că în ambele cazuri sistemul linear complet $|C|$ nu are puncte bază.

Cazul $(C^2) = 0$. Atunci $\dim |C| = 1$ şi deci $\varphi_{|C|} : X \to |C| = P^1$ are drept fibre elementele lui $|C|$, care sînt curbe raţionale nesingulare. Deci X este o suprafaţă geometric riglată de bază P^1.

Cazul $(C^2) = 1$. Fie D o curbă integră oarecare pe X şi $x \in D$ un punct. Deoarece $\dim |C| = 2$, există o curbă $C' \in |C|$ astfel încît $x \in C'$. Dacă $C' = D$, avem $(C \cdot D) = (C \cdot C') = 1 > 0$, iar dacă $C' \neq D$, atunci din nou $(C \cdot D) = (C' \cdot D) > 0$. Rezultă că morfismul $\varphi_{|C|} : X \to P^2$ este un morfism finit (şi surjectiv). Cum C este imaginea inversă prin $\varphi_{|C|}$ a unei drepte din P^2 şi $(C^2) = 1$, rezultă că $\varphi_{|C|}$ este un izomorfism. Q.E.D.

(13.8) PROPOZIŢIE. *Fie X o suprafaţă minimală cu $c(X) = -1$, $q > 0$ şi cu proprietatea că prin fiecare punct $x \in X$ trece o curbă C raţională şi nesingulară. Atunci X este o suprafaţă geometric riglată (deci X este riglată) via morfismul $f : X \to B$ dedus din factorizarea Stein a morfismului Albanese $\alpha : X \to \mathrm{Alb}(X)$.*

Demonstraţie. Condiţia $c(X) = -1$ implică $p_g = 0$, şi din (5.3) avem $\dim \mathrm{Alb}(X) = q > 0$. Cum $\alpha(X)$ nu poate fi un punct (atunci $\alpha(X)$ nu ar mai genera pe $\mathrm{Alb}(X)$), $\dim \alpha(X) \geqslant 1$. Dacă $x \in X$ este un punct închis şi C este o curbă raţională şi nesingulară ce trece prin x, atunci $\alpha(C)$ este un punct şi deci $\dim \alpha^{-1}(\alpha(x)) = 1$. Prin urmare $\dim \alpha(X) = 1$, şi deci normalizata B a curbei $\alpha(X)$ în corpul funcţiilor raţionale $k(X)$ este curbă proiectivă şi nesingulară. Dacă $f : X \to B$ este morfismul dedus din α via factorizarea Stein, atunci $f(C)$ este un punct pentru orice curbă raţională şi nesingulară C de pe X. Cum fibra generală a morfismului f este integră (cf. (7.3)), rezultă în ipotezele noastre că fibra generală a lui f este o curbă raţională nesingulară. Din (12.2) deducem că f este o riglare geometrică deoarece X este o suprafaţă minimală. Acest

fapt (anume că f este riglare geometrică) se poate deduce însă și direct în felul următor: Dacă $D = \sum_{i=1}^{r} n_i E_i$ este o fibră a lui f, cu $n_i \geqslant 1$, E_i curbă integră și $E_i \neq E_j$ pentru $i \neq j$, atunci avem $(D^2) = 0$ și $(K \cdot D) = -2$ deoarece $p_a(D) = 0$. Dacă $r > 1$, atunci $(E_i^2) < 0$ (cf. (2.6)), și cum X este minimală, $(K \cdot E_i) \geqslant 0$ pentru orice i, de unde $(K \cdot D) \geqslant 0$, absurd. Deci $r = 1$, adică $D = nE$, cu $n \geqslant 1$ și E curbă integră. Însă $-2 = (K \cdot D) = n(K \cdot E)$, de unde, dacă $n \geqslant 2$, $(K \cdot E) = -1$. Cum însă $(E^2) = 0$, acest lucru nu este posibil ținînd cont de formula genului. Q.E.D.

(13.9) LEMĂ. *Dacă X este o suprafață minimală cu $c(X) = -1$ există o secțiune hiperplană H pe X astfel încît $(K \cdot H) < 0$.*

Demonstrație. Fie C o curbă integră pe X astfel încît $(K \cdot C) < 0$. Deoarece X este minimală avem $(C^2) \geqslant 0$. Fie H_1 o secțiune hiperplană pe X. Pentru orice $n \geqslant 0$ divizorul $nC + H_1$ este amplu deoarece:

$$((nC + H_1)^2) = n^2(C^2) + 2n(C \cdot H_1) + (H_1^2) \geqslant (H_1^2) > 0 \text{ și}$$

$$(nC + H_1 \cdot D) = n(C \cdot D) + (H_1 \cdot D) \geqslant (H_1 \cdot D) > 0$$

pentru orice curbă integră D de pe X și afirmația rezultă din criteriul Nakai-Moishezon (cf. (1.25)). Acum observăm că pentru orice $n \gg 0$ avem $(K \cdot nC + H_1) < 0$. Q.E.D.

Vom analiza acum suprafețele minimale X cu $(K^2) \leqslant 0$ și $c(X) = -1$.

(13.10) PROPOZIȚIE. *Fie X o suprafață minimală cu $c(X) = -1$ și $(K^2) \leqslant 0$. Atunci pentru orice $n \geqslant 0$ există un divizor $D \in \mathrm{Div}(X)$ astfel încît $|D + K| \neq \emptyset$, $(D \cdot K) < 0$ și $\dim |D| \geqslant n$.*

Demonstrație. După (13.9) există o secțiune hiperplană H pe X astfel încît $(K \cdot H) < -2n-2q$. Din (13.1) și $c(X) = -1$ rezultă că adjuncția pe X se termină. Deci există un $m \geqslant 0$ astfel încît $|H + mK| \neq \emptyset$ și $|H + (m+1)K| = \emptyset$. Fie $D' \in |H + mK|$. Nu putem avea $D' = 0$ deoarece atunci $H \sim -mK$ și deci $(H^2) = m^2(K^2) \leqslant 0$, absurd. Deci $D' > 0$. Descompunem pe D' în $D' = D + D''$, cu D (resp. D'') partea lui D' ce conține toate componentele E ale lui D' cu proprietatea $(K \cdot E) < 0$ (resp. cu $(K \cdot E) \geqslant 0$). Cum

$|K-D| \subseteq |K| = \emptyset$, avem după teorema Riemann-Roch :

$$\dim |D| \geqslant 1/2(D^2) - 1/2(D \cdot K) - q \geqslant 1/2(D^2) - 1/2(D + D'' \cdot K) -$$

$$- q = 1/2(D^2) - 1/2(D' \cdot K) - q = 1/2(D^2) - 1/2(H \cdot K) -$$

$$- 1/2m(K^2) - q \geqslant 1/2(D^2) - 1/2(H \cdot K) - q \geqslant -1/2\,(H \cdot K) -$$

$$- q \geqslant (n + q) - q = n.$$

(Am folosit faptul că $(D'' \cdot K) \geqslant 0$, $(K^2) \leqslant 0$, și dacă E este o componentă a lui D, atunci $(E^2) \geqslant 0$ (deoarece X este minimală și $(K \cdot E) < 0$), de unde $(D^2) \geqslant 0$.)

Cum $D \neq 0$ avem $(K \cdot D) < 0$. De asemenea, cum $|K + D| \subseteq |K + D'| = |H + (m + 1) K| = \emptyset$, demonstrația propoziției (13.10) este completă.

(13.11) PROPOZIȚIE. *Fie X o suprafață minimală cu $p_2 = q = 0$. Atunci $c(X) = -1$. Dacă în plus $(K^2) \leqslant 0$, atunci există pe X o curbă rațională și nesingulară C astfel încît $(K \cdot C) < 0$ și $|K + C| = \emptyset$. În particular, X este rațională în acest ultim caz.*

Demonstrație. Dacă $(K^2) < 0$ avem $c(X) = -1$. Într-adevăr, dacă ar exista un $D \in |nK|$ pentru un $n \geqslant 1$, atunci $(K \cdot D) = n(K^2) < 0$, și deci după (13.1), $c(X) = -1$. Presupunem acum $(K^2) \geqslant 0$, și $p_2 = q = 0$. După teorema Riemann-Roch avem

$$\dim |-K| + \dim |2K| \geqslant (K^2) - 1,$$

și cum $\dim|2K| = -1 (p_2 = 0)$, avem $\dim |-K| \geqslant (K^2) \geqslant 0$. Există deci un $D \in |-K|$. Cum $D > 0$ (dacă $D = 0$, atunci $K \sim 0$ și deci $p_g = 1$, absurd), atunci pentru fiecare divizor $D' \in \mathrm{Div}(X)$ există un $n_{D'} \geqslant 1$ astfel încît $|D' + nK| = |D' - nD| = \emptyset$ pentru orice $n \geqslant n_{D'}$ (vezi (7.11.3)). Altfel spus, adjuncția pe X se termină și după (13.1), $c(X) = -1$.

Presupunem acum $(K^2) \leqslant 0$. După (13.10) există un divizor efectiv E pe X astfel încît $(K \cdot E) < 0$ și $|K + E| = \emptyset$. Atunci o componentă C a lui E are încă proprietatea $(K \cdot C) < 0$. În plus, $|K + C| \subseteq |K + E| = \emptyset$, și deci avem și $|K + C| = \emptyset$. După (13.5) i) $p_a(C) \leqslant q = 0$, și deci C este curbă rațională nesingulară. Ultima afirmație rezultă din (13.7) și (11.10). Q.E.D.

(13.12) PROPOZIȚIE. *Fie X o suprafață minimală cu $p_g = 0$ și $q > 0$. Atunci $(K^2) \leqslant 0$, iar dacă $q > 1$ atunci $(K^2) < 0$.*

Demonstrație. Deoarece $p_g = 0$ formula lui Noether se scrie ținînd cont de (5.1):

$$10 - 8q = (K^2) + b_2.$$

Dacă $q > 1$, atunci rezultă $(K^2) < 0$, iar dacă $q = 1$, avem $2 = (K^2) + b_2$. Este deci suficient să arătăm că $b_2 \geqslant 2$. Însă după (5.3) dim Alb $(X) = 1$, și deci morfismul Albanese nu poate fi constant. Rezultă că X este o fibrare peste Alb (X). Din (8.7) și inegalitatea Igusa-Severi rezultă atunci $b_2 \geqslant 2$. Q.E.D.

(13.13) PROPOZIȚIE. *Fie X o suprafață minimală cu $q > 0$. Atunci $c(X) = -1$ dacă și numai dacă X este o suprafață geometric riglată.*

Demonstrație. Dacă X este riglată, atunci $c(X) = -1$ după (11.15). Presupunem deci X suprafață minimală cu $q > 0$ și $c(X) = -1$. Ținînd cont de (13.8) este suficient să arătăm că prin fiecare punct $x \in X$ trece o curbă rațională nesingulară. Presupunem prin absurd că acest lucru nu se realizează. Atunci pe X există cel mult un număr finit de curbe raționale nesingulare. Într-adevăr, fie $f: X \to B$ morfismul dedus din factorizarea Stein a morfismului Albanese $\alpha : X \to$ Alb (X) (vezi demonstrația lui (13.8). Dacă pe X ar exista o infinitate de curbe raționale nesingulare, atunci fiecare dintre acestea ar fi conținută în cîte una din fibrele lui f. Deci există o infinitate de puncte $b \in B$ cu dim $f^{-1}(b) = 1$. Rezultă că B nu poate fi suprafață, deci B este curbă nesingulară. Cum fibra generală a lui f este integră și cum o infinitate de fibre ale lui f conțin cîte o curbă rațională nesingulară, rezultă că una din fibrele lui f este curbă rațională nesingulară. Din demonstrația lui (13.8) rezultă atunci că toate fibrele lui f sînt raționale și nesingulare, ceea ce noi am exclus.

Fixînd acum o scufundare proiectivă $X \hookrightarrow P^n$ a lui X, există cel mult un număr finit de curbe integre E pe X de grad dat d și astfel încît $H^0(N_E) = 0$, cu N_E fasciculul normal al lui E în X. Într-adevăr, dacă $C(d)$ este schema lui Hilbert a tuturor curbelor de grad d de pe X, și dacă $e \in C(d)$ este punctul (închis) din $C(d)$ corespunzător curbei E, atunci $H^0(N_E)$ se identifică cu spațiul tangent la $C(d)$ în punctul e (vezi Mumford [1]), și deci e este un punct izolat al lui $C(d)$. Cum însă $C(d)$ este o schemă proiectivă (*loc. cit*) există cel mult un număr finit de puncte izolate ale lui $C(d)$, și deci X conține un număr finit de curbe integre E cu $H^0(N_E) = 0$. În particular, există doar un număr finit de curbe nesingulare E de grad d avînd una din proprietățile:

a) $(E^2) < 0$, sau

b) E este curbă eliptică, $(E^2) = 0$ și $N_E \not\cong O_E$.

Fie atunci $\mathscr{F}$ mulţimea tuturor curbelor nesingulare E de pe X care sînt sau raţionale, sau cu una din proprietăţile a) sau b) de mai sus. Vom demonstra mai întîi propoziţia (13.13) în ipoteza suplimentară că corpul de bază k este (algebric închis şi) nenumărabil. Fie atunci $d = \deg(X)$ în raport cu scufundarea fixată mai sus. Deoarece $\mathscr{F}$ conţine cel mult un număr finit de curbe de grad d, un hiperplan general H din P^n taie pe X după o curbă C nesingulară şi conexă (după teorema lui Bertini) care nu aparţine lui $\mathscr{F}$. Cum $\mathscr{F}$ este o mulţime numărabilă şi C nenumărabilă (deoarece am presupus k nenumărabil), mulţimea $C - \bigcup_{E \in \mathscr{F}} (C \cap E)$ este infinită, de unde rezultă că $X - \bigcup_{E \in \mathscr{F}} E$ este o mulţime infinită.

Fie atunci $x_1, \ldots, x_q$ (q este iregularitatea lui X) q puncte distincte din $X - \bigcup_{E \in \mathscr{F}} E$. După (13.12), $(K^2) \leqslant 0$, şi deci după (13.10), există un divizor efectiv $D' \in \mathrm{Div}(X)$ astfel încît $(K \cdot D') < 0$, $|D' + K| = \emptyset$ şi $\dim |D| \geqslant 3q$. Atunci după (13.6) există un divizor $D = \sum_{i=1}^{r} n_i E_i \in |D'|$, cu $n_i \geqslant 1$, E_i curbe integre cu $E_i \neq E_j$ dacă $i \neq j$, astfel încît D conţine fiecare x_h, $h = 1, \ldots, q$, ca punct multiplu. Fie i_h un indice cu proprietatea că $x_h \in E_{i_h}$. Atunci E_{i_h} nu aparţine lui $\mathscr{F}$ şi deci după (13.5) iii) avem în mod necesar $n_{i_h} = 1$, şi cum E_{i_h} este nesingulară (cf. (13.4)), rezultă că x_h se află la intersecţia a cel puţin două componente ale lui D cu coeficient 1.

Însă observăm că dacă din D se scot un număr oarecare de componente astfel încît să se obţină un divizor efectiv D', atunci avem $|K + D'| \subseteq |K + D| = \emptyset$, deci după (13.5) ii), D' rămîne cu suportul conex. De aici rezultă că dacă $q \geqslant 2$, atunci scoţînd o componentă F_j dintr-un drum $F_1, \ldots, F_n$ ce uneşte pe x_1 cu x_2 (vezi figura 13), vom disconecta pe D (deoarece D neprezentînd

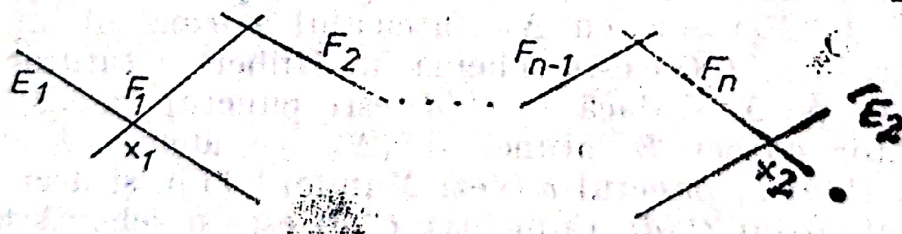


Figura 13

bucle, nu mai există un al doilea drum ce leagă x_1 de x_2). Deci dacă $q \geqslant 2$ sîntem conduşi la o absurditate.

Dacă $q = 1$ şi E_1 şi E_2 sînt două componente ale lui D ce trec prin punctul x_1, după (13.5) i) avem:

$$q = 1 \geqslant p_a(E_1) + p_a(E_2),$$

ceea ce este din nou absurd deoarece E_1 şi E_2 neaparţinînd lui $\mathscr{F}$ avem $p_a(E_1) \geqslant 1$ şi $p_a(E_2) \geqslant 1$.

Propoziţia (13.13) este deci demonstrată în cazul cînd corpul k nu este numărabil. Mai exact, am demonstrat în acest caz că morfismul $f : X \to B$ dedus din morfismul Albanese $\alpha : X \to \mathrm{Alb}\,(X)$ via factorizarea Stein este o riglare geometrică.

Dacă corpul k este numărabil, fie $k \hookrightarrow k'$ o extindere a lui k astfel încît k' să fie algebric închis şi nenumărabil. Fie $X' = X \otimes \otimes_k k'$. Atunci este clar că $c(X') = -1$ şi $q(X') = q\,(X) > 0$. Din cele demonstrate mai sus rezultă că morfismul $f' : X' \to B'$ obţinut din morfismul Albanese $\alpha' : X' \to \mathrm{Alb}\,(X')$ via factorizarea Stein, are fibra generală izomorfă cu $P^1_{k'}$. Este imediat de verificat că $B' = B \otimes_k k'$ şi $f' = f \otimes_k k'$. Fie F_b o fibră integră a lui f peste un punct închis $b \in B$ şi fie $b' \in B'$ un punct închis astfel încît $v\,(b') = b$. Rezultă atunci că fibra $f'^{-1}\,(b')$ este izomorfă (peste k') cu $F_b \otimes_k k'$, şi deci $f'^{-1}(b')$ este o curbă integră de gen aritmetic zero. Atunci F_b este integră de gen aritmetic zero, adică $F_b \cong P^1_k$. Cum X este minimală, f este atunci o riglare geometrică (vezi demonstraţia lui (13.8) pentru a arăta că toate fibrele lui f sînt integre, şi deci fiecare izomorfă cu P^1_k). Q.E.D.

(13.14) *Observaţii.* a) Demonstraţia propoziţiei (13.13) oferă o altă cale (mai complicată) de a proba punctul b) al teoremei (12.2).

b) Dacă X este o suprafaţă minimală cu $p_g = 0$ şi $q \geqslant 2$, atunci X este suprafaţă riglată. Într-adevăr, după (13.12) $(K^2) < 0$, iar după (1.25) avem $c\,(X) = -1$. Afirmaţia este o consecinţă a propoziţiei (13.13).

c) Propoziţiile (13.11) şi (13.13) reduc demonstraţia teoremei (13.2) la teorema (13.3) cu ipoteza suplimentară $(K^2) > 0$.

(13.15) Trecem acum la demonstraţia teoremei (13.3) în cazul $(K^2) > 0$. Demonstraţia acestei teoreme în cazul $(K^2) > 0$ este mult mai delicată decît în cazul $(K^2) \leqslant 0$.

Observăm mai întîi că dacă ar exista un divizor efectiv D astfel încît $(K \cdot D) < 0$ şi $|K + D| = \emptyset$, atunci o componentă C a lui D ar avea aceleaşi proprietăţi : $(K \cdot C) < 0$ şi $|K + C| = \emptyset$. Din (13.5) i) rezultă atunci că $p_a(C) \leqslant q = 0$, şi deci C este o curbă raţională nesingulară. Atunci raţionalitatea suprafeţei X rezultă din (13.7).

Rămîne de analizat cazul în care pentru orice divizor efectiv D astfel încît $|K + D| = \emptyset$, atunci $(K \cdot D) \geqslant 0$.

(13.16) LEMĂ. *Dacă X este o suprafață minimală astfel încît $(K^2) > 0$, $p_2 = 0$, $q = 0$ și pentru orice divizor efectiv D cu proprietatea $|K + D| = \emptyset$ avem $(K \cdot D) \geqslant 0$, atunci :*

a) Pic (X) *este generat de* $\omega_X = O_X(K)$ *și* $O_X(-K)$ *este amplu.*

b) *Fiecare* $D \in |-K|$ *este o curbă integră cu* $p_a(D) = 1$.

c) $(K^2) \leqslant 5$ *și* $b_2 \geqslant 5$.

Demonstrație. Arătăm mai întîi că orice $D \in |-K|$ este o curbă ireductibilă. Presupunem prin absurd că ar exista un $D \in |-K|$ reductibil. Avem $D > 0$ și $(K \cdot D) = -(K^2) < 0$. Atunci o componentă C a lui D are proprietatea $(K \cdot C) < 0$. Observăm că $|K + C| = \emptyset$; într-adevăr, dacă ar exista un $\Delta \in |K + C|$, atunci $0 < D - C + \Delta \in |K + C + D - C| = |K + D| = |0|$, ceea ce este o absurditate. Însă situația $|K + C| = \emptyset$ și $(K \cdot C) < 0$ nu este posibilă ținînd cont de ipotezele lemei. În plus avem

$$p_a(D) = 1/2(D^2) + 1/2(D \cdot K) + 1 = 1/2(K^2) - 1/2(K^2) + 1 = 1.$$

Arătăm acum că *orice divizor $D \geqslant 0$ astfel încît $|K + D| = \emptyset$ este în mod necesar nul.* Într-adevăr, dacă $D > 0$ și $|K + D| = \emptyset$, există un $C \in |-K|$ astfel încît $D \cap C \neq \emptyset$ $(\dim |-K| \geqslant (K^2) \geqslant 1$, și cum sistemul linear $|-K|$ nu are componente fixe, aplicația rațională $\varphi_{|-K|}$ este definită în complementara unui număr finit de puncte. Fie $x \in D$; dacă x este punct bază pentru $|-K|$, atunci $D \cap C$ conține pe x pentru orice $C \in |-K|$, iar dacă x nu este punct bază pentru $|-K|$, atunci $D \cap C$ conține pe x, unde $C = \varphi^{-1}_{|-K|}(H)$, cu H hiperplan din $|-K|$ ce trece prin punctul $\varphi_{|-K|}(x)$). Atunci $(K \cdot D) = -(C \cdot D) < 0$, deoarece $(C^2) = (K^2) > 0$ și $D \cap C \neq \emptyset$. Însă $(K \cdot D) < 0$ și $|K + D| = \emptyset$ contrazic din nou ipotezele lemei și afirmația este dovedită.

După (13.11) $c(X) = -1$, iar după (13.1) adjuncția pe X se termină. Aceasta înseamnă că pentru orice divizor $\Delta \in \mathrm{Div}(X)$ există un întreg n astfel încît $|\Delta + nK| \neq \emptyset$ și $|\Delta + (n+1)K| = \emptyset$. Dacă $D \in |\Delta + nK|$, avem $|K + D| = \emptyset$, și deci $D = 0$ după cele arătate mai sus. Altfel spus, $\Delta \sim -nK$, de unde rezultă că Pic(X) este generat de $\omega_X = O_X(K)$.

În plus, deoarece $c(X) = -1$, avem $H^0(O_X(nK)) = 0$ pentru orice $n \geqslant 1$. Cum X este suprafață proiectivă și Pic$(X) = \mathbb{Z}\,\omega_X$, rezultă că pentru orice $n \geqslant 0$, $O_X(-nK)$ este foarte amplu, și deci $O_X(-K)$ este amplu. În acest fel punctul a) este dovedit.

Ca să demonstrăm punctul b) rămîne de arătat că orice $D \in |-K|$ este redus. Fie pentru aceasta $D = m\,D_{\mathrm{red}}$, cu $m \geqslant 1$. Din a) rezultă că există un întreg m' astfel încît $D_{\mathrm{red}} \sim m'D$. Atunci

$D \sim mm'D$, şi cum $D > 0$ şi X este suprafaţă proiectivă, avem $mm' = 1$. Deci $m = 1$, adică $D = D_{red}$.

În fine, dacă prin absurd $(K^2) \geqslant 6$, avem $\dim|-K| \geqslant (K^2) \geqslant 6$. Fie x_1 şi x_2 două puncte distincte pe X. După (13.6) există $C \in |-K|$ care să aibă pe x_1 şi x_2 drept puncte multiple. Însă după b), C este curbă integră cu $p_a(C) = 1$, fapt ce contrazice ultima afirmaţie. Deci $(K^2) \leqslant 5$. Din formula lui Noether $10 = (K^2) + b_2$ rezultă $b_2 \geqslant 5$. Q.E.D.

Ca să încheiem demonstraţia teoremei (13.3) va fi suficient să probăm următoarea lemă fundamentală:

(13.17) LEMĂ. *Nu există suprafeţe cu* $q = 0$ *şi cu proprietăţile* a), b) şi c) din lema (13.16).

Observăm mai întîi că proprietatea a) din (13.16) implică faptul că suprafaţa X este minimală, $(K^2) > 0$ şi $p_n = 0$ pentru orice $n \geqslant 1$. Demonstrăm mai întîi (13.17) în cazul cînd k este de caracteristică zero, în care caz are loc următorul enunţ mai precis.

(13.18) LEMĂ. *Dacă k este un corp algebric închis de caracteristică zero, atunci nu există suprafeţe X cu $q = 0$ şi cu proprietăţile a) şi c) din lema* (13.16).

Demonstraţie. Utilizînd principiul lui Lefschetz (vezi Bucur [2], pag. 124) este suficient să presupunem $k = \mathbb{C}$, corpul numerelor complexe. Atunci, punîndu-ne de acord cu Serre [2], pentru orice O_X-modul coerent F notăm prin F^h fasciculul analitic coerent asociat lui F. Atunci şirul exact exponenţial

$$0 \to \mathbb{Z} \to O_X^h \to (O_X^h)^* \to 1$$

induce şirul exact de coomologie

$$H^1(O_X^h) \to H^1((O_X^h)^*) \to H^2(X, \mathbb{Z}) \to H^2(O_X^h).$$

După Serre [2] avem $H^i(O_X^h) \cong H^i(O_X)$ $\forall i$ şi $H^1((O_X^h)^*) \cong$ $\cong H^1(O_X^*) = \mathrm{Pic}(X)$. Cum $q = p_g = 0$, deducem că $\mathrm{Pic}(X) \cong H^2(X, \mathbb{Z})$, de unde $b_2 = \mathrm{rang}\, H^2(X, \mathbb{Z}) = \mathrm{rang}\, \mathrm{Pic}(X) = 1$ (condiţia a) din lema (13.16)), ceea ce contrazice condiţia c) din aceeaşi lemă Q.E.D.

(13.19) *Observaţie.* Demonstraţia criteriului lui Castelnuovo în caracteristică zero oferă în acest caz o nouă demonstraţie pentru teorema (12.8). Într-adevăr, fie X o suprafaţă minimală raţională. Atunci $p_2 = q = 0$. După (13.11) şi demonstraţia criteriului lui Castelnuovo în cazul $(K^2) > 0$ şi $\mathrm{car}(k) = 0$, există o curbă raţională nesingulară cu proprietăţile $(K \cdot C) < 0$ şi $|K + C| = \emptyset$. După

(13.7), X este atunci izomorfă fie cu P^2, fie cu o suprafață geometric riglată peste P^1 (deci cu una din suprafețele X_n, $n \geqslant 0$ și $n \neq 1$ cf. (12.5)).

Cu toate acestea am preferat să prezentăm și demonstrația dată teoremei (12.8) în § 12, care, deși mai lungă, are avantajul că este elementară, nu depinde de clasificarea suprafețelor și merge în orice caracteristică.

Trecem acum la demonstrația lemei (13.17) (și deci a criteriului lui Castelnuovo) în caracteristică $p > 0$. Ideea este de a reduce demonstrația la caracteristică zero.

(13.20) LEMĂ. *Fie X o suprafață cu $q = 0$ și cu proprietățile* a), b), și c) *din lema* (13.16). *Atunci există o curbă nesingulară* $D \in |-K|$.

Demonstrație. Presupunem prin absurd că toate curbele sistemului linear complet $|-K|$ sînt singulare. Deoarece pentru orice $D \in |-K|$, D este integră și $p_a(D) = 1$, D este curbă rațională cu o singură singularitate, care este: fie punct cuspidal ordinar, fie punct dublu cu tangente distincte (vezi demonstrația lui (7.18), sau Serre [3], cap. IV). Fie $L \subseteq |-K|$ un subsistem linear de dimensiune 1 (într-adevăr, avem dim $|-K| \geqslant (K^2) \geqslant 1$). Atunci aplicația rațională $\varphi = \varphi_L : X \to L = P^1$ are drept fibre exact curbele aparținînd lui L, deoarece L nu are componente fixe (toate curbele din L sînt integre). Fie Y mulțimea tuturor singularităților curbelor aparținînd lui L și $x \in X$ un punct bază al lui L. Atunci $x \notin Y$.

Într-adevăr, dacă prin absurd $x \in Y$, atunci fie $D \in L$ o curbă ce conține pe x drept punct singular și $u_1 : X_1 \to X$ transformarea pătratică a lui X de centru x. Atunci transformata proprie D' a curbei D prin u_1 este o curbă rațională nesingulară, care se identifică cu una din fibrele aplicației raționale $\varphi_1 = \varphi \circ u_1 : X_1 \to P^1$. Cum după cel mult (K^2) transformări pătratice obținem o suprafață $\tilde{X}$ astfel încît $\tilde{\varphi} = \varphi \circ u$($u$ fiind compunerea acestor transformări pătratice) să fie morfism, rezultă că una din fibrele lui $\tilde{\varphi}$ este curbă rațională nesingulară. Din (11.10) deducem că $\tilde{X}$ (și deci și X) este suprafață rațională. Însă după teorema (12.8) nu există modele minimale X de suprafețe raționale cu proprietatea $\mathrm{Pic}(X) = \mathbb{Z}\,\omega_X$.

Am demonstrat deci că Y nu conține nici un punct bază al lui L. Fie atunci $u : \tilde{X} \to X$ o compunere de un număr minim de transformări pătratice astfel încît $\tilde{\varphi} = \varphi \circ u$ să devină morfism. Atunci $\tilde{\varphi} : \tilde{X} \to P^1$ este o fibrare cvasieliptică avînd toate fibrele curbe integre, raționale și cu cîte o singură singularitate. Din (7.18) deducem că fiecare asemenea singularitate este punct cuspidal ordinar, și că această situație poate apărea numai în caracteristică 2 sau 3.



Fie $\widetilde{Y}$ locul geometric al tuturor singularităţilor fibrelor lui $\tilde{\varphi}$. Dacă car$(k) = 3$, din demonstraţia lui (7.18) rezultă că $\widetilde{Y}$ este o curbă nesingulară şi ireductibilă şi că restricţia $\tilde{\varphi}/\widetilde{Y} : \widetilde{Y} \to P^1$ este un morfism bijectiv pur neseparabil de grad $p = 3$. O concluzie asemănătoare este valabilă şi dacă car$(k) = 2$.

Într-adevăr, punîndu-ne de acord cu notaţiile din demonstraţia teoremei (7.18) (cu $f = \tilde{\varphi}$ şi $B = P^1$), avem

$$f(u,v) = U(u, v)\cdot(u^2 + v^3),\ U(u, v) \in k\,[[u, v]],\ U(0, 0) \neq 0.$$

Se observă că $\partial f/\partial v\,(0, v) = U(0, 0)\,v^2 +$ termeni de grad > 2; deci după teorema de preparare a lui Weierstrass avem :

$$\partial f/\partial v(u, v) = V(u, v)\cdot(v^2 + R_1(u)\,v + R_2(u)),$$

cu $V(0, 0) \neq 0$ şi $R_1(u)$ şi $R_2(u)$ serii neinversibile din $k[[u]]$. Se observă imediat că $R_1(u) = 0$. Afirmăm că coeficienţii puterilor de grad impar ale lui u din seria $R_2(u)$ sînt nuli.

Într-adevăr, în caz contrar, observăm că, deoarece $\widetilde{Y}$ este o curbă şi seria $v^2 + R_2(u)$ este ireductibilă în acest caz, $v^2 + R_2(u)$ divide seria $\partial f/\partial u$ ($\widetilde{Y}$ fiind exact mulţimea punctelor lui X în care $f = \tilde{\varphi}$ nu este morfism neted). Se observă însă imediat că acest ultim fapt este imposibil.

Am demonstrat deci că dacă car$(k)=2$, atunci $\partial f/\partial v = V(u, v)\cdot g^2$, cu $V(0, 0) \neq 0$ şi $g \in k[[u, v]]$ serie de ordin 1. Cum $g = 0$ este o ecuaţie locală pentru $\widetilde{Y}$, atunci $\widetilde{Y}$ este o curbă ireductibilă nesingulară. Cum $\widetilde{Y}$ intersectează fiecare fibră F a lui $\tilde{\varphi}$ în cîte un singur punct şi $(Y \cdot F) = p = 2$, avem (la fel ca în cazul cînd car$(k) =$ $= 3$) că $\tilde{\varphi}/\widetilde{Y} : \widetilde{Y} \to P^1$ este un morfism bijectiv pur neseparabil, cu $\widetilde{Y}$ curbă (ireductibilă) nesingulară.

Rezultă că dacă car$(k) = p = 2$ sau 3, curba $\widetilde{Y}$ este raţională nesingulară. Pe de altă parte, deoarece nici-un punct bază al lui L nu aparţine lui Y, rezultă că $\widetilde{Y}$ este izomorfă cu Y via morfismul $u/\widetilde{Y}$, şi deci Y este de asemenea o curbă (ireductibilă) nesingulară şi raţională.

Folosind acum ipoteza că $\mathrm{Pic}(X) = \mathbb{Z}\, O_X(D)$, cu $D \in |-K|$, avem $Y \sim mD$ pentru un m întreg. Folosind faptul că X este proiectivă şi că Y şi D sînt curbe de genuri aritmetice diferite, deducem

că $m \geqslant 2$. Calculînd genul aritmetic al lui Y cu formula genului, avem :

$$p_a(Y) = p_a(mD) = 1/2(mD \cdot mD) + 1/2(mD \cdot K) + 1 =$$

$$= 1/2\, m(m-1)\,(K^2) + 1 > 0.$$

ceea ce contrazice faptul că $p_a(Y) = 0$. Q.E.D.

(13.21) LEMĂ. *Fie X o suprafață cu $q = 0$ și cu proprietățile* a), b) *și* c) *din lema* (13.6). *Atunci $H^2(X, T_X) = 0$, unde $T_X = (\Omega^1_{X/k})^\vee$ este fasciculul asociat fibrării tangente a lui X.*

Demonstrație. După (13.20) există o curbă eliptică nesingulară $D \in |-K|$. Considerăm atunci șirul exact :

$$0 \to O_X((n-1)\,D) \otimes T_X \to O_X(nD) \otimes T_X \to O_X(nD) \otimes T_X \otimes O_D \to 0 \;(n \geqslant 0).$$

care induce șirul exact de coomologie :

$$H^1(O_X(nD) \otimes T_X \otimes O_D) \to H^2(O_X((n-1)\,D) \otimes T_X) \to H^2(O_X(nD) \otimes T_X).$$

Din proprietatea a) a lemei (13.16) rezultă că D este un divizor amplu pe X, deci după o teoremă a lui Serre [1] sau EGA III 2.2.2, avem $H^2(O_X(nD) \otimes T_X) = 0$ pentru $n \gg 0$. Deci pentru anularea lui $H^2(X, T_X)$ va fi suficient să arătăm că $H^1(O_X(nD) \otimes T_X \otimes O_D) = 0$ pentru orice $n \geqslant 1$.

În acest scop scriem șirul exact canonic :

$$0 \to T_D \to T_X \otimes O_D \to N = O_X(D) \otimes O_D \to 0.$$

care, prin tensorizare cu $O_X(nD)$ și ținînd cont că $T_D \cong O_D$ (D fiind curbă eliptică), induce șirul exact de coomologie :

$$H^1(O_X(nD) \otimes O_D) \to H^1(O_X(nD) \otimes T_X \otimes O_D) \to H^1(O_X(nD) \otimes N).$$

Aplicînd teorema Riemann-Roch pe D și ținînd cont că $(D^2) > 0$, obținem $H^1(O_X(nD) \otimes O_D) = H^1(O_X(nD) \otimes N) = 0$, pentru orice $n \geqslant 1$. Q.E.D.

(13.22) Revenim la demonstrația lemei fundamentale (13.17). Cum această lemă este deja demonstrată în cazul în care caracteristica lui k este zero, presupunem car$(k) = p > 0$. Fie atunci $A = W(k)$ inelul vectorilor lui Witt peste corpul k, care este un inel de

valuare discretă, complet, de caracteristică zero, cu idealul maximal m generat de p, şi cu corpul rezidual izomorf cu k. Tehnica de demonstraţie constă în a ridica pe X la caracteristică zero şi a folosi rezultatul deja probat în caracteristică zero. Lema (13.21) afirmă că $H^2(X, T_X)=0$. Cum în plus X este proiectivă şi $H^2(O_X)=0$, putem aplica teorema 7.3, éxposé III din Grothendieck [7] şi deducem că există un morfism neted proiectiv $f: U \to V = \mathrm{Spec}(A)$, a cărui fibră închisă să fie izomorfă cu X. Vom nota prin X' fibra generică a lui f. Atunci X' este o suprafaţă netedă peste corpul de fracţii k' al lui A.

Deoarece fibrele lui f sînt de dimensiune 2, $R^i f_*(O_U) = 0$ pentru orice $i \geqslant 3$ (cf. EGA III 4.2.2). Utilizînd teoremele de schimbare a bazei (vezi Mumford [2], II, § 5) rezultă că omomorfismul canonic $(R^2 f_*(O_U)) \otimes_A (A/m) \to H^2(f^{-1}(m), O_U/mO_U) = H^2(X, O_X)=0$ este un izomorfism. Cu lema lui Nakayama deducem $R^2 f_*(O_U)=0$. Repetînd acelaşi raţionament obţinem $R^1 f_*(O_U) = 0$, şi deci :

(13.22.1) $$H^1(X', O_{X'}) = 0.$$

Fie k'' o închidere algebrică a corpului k' şi $\{k_i'\}$ familia tuturor subextinderilor finite $k_i' \supseteq k'$ ale lui k''. Notăm $X'' = X' \otimes_{k'} k_i'$ şi $T_i = X' \otimes_{k'} k_i'$. Fie A'' închiderea întreagă a lui A în k'' şi A_i închiderea întreagă a lui A în k_i, şi fie m'' un ideal maximal al lui A'' care stă peste idealul maximal m al lui A. Notăm cu B'' localizatul $A''_{m''}$, cu $m_i = A_i \cap m''$, cu B_i localizatul $(A_i)_{m_i}$, cu n'' idealul $m''B''$ şi cu $n_i = m_i B_i$. Deoarece $k = A/m$ este corp algebric închis, $B''/n'' = B_i/n_i = k$.

Fie $V_i = \mathrm{Spec}(B_i)$, $U_i = U \otimes_A B_i$ şi f_i morfismul $f \otimes_A B_i : U_i \to V_i$. Deoarece $B_i/n_i = k$, fibra închisă a lui f_i se identifică cu X; de asemenea fibra generică a lui f_i se identifică cu T_i. În plus, deoarece extinderea $k_i' \supseteq k'$ este finită, B_i este inel de valuare discretă.

Cum subextinderile finite k_i' formează un sistem inductiv a cărui limită inductivă este k'', familia de O_X-algebre $O_{X'} \otimes_{k'} k_i'$ (împreună cu omomorfismele induse de incluziunile $k_i' \subseteq k_j'$) formează un sistem inductiv a cărui limită inductivă este O_X-algebra $O_{X'} \otimes_{k'} k''$. Cum $T_i = \mathrm{Spec}(O_{X'} \otimes_{k'} k_i')$ şi $X'' = \mathrm{Spec}(O_{X'} \otimes_{k'} k'')$, atunci din EGA IV 8.2.3 rezultă că X'' este limita proiectivă a schemelor T_i. În particular, morfismele canonice $X'' \to T_i$ induc omomorfismele de grupuri $\mathrm{Pic}(T_i) \to \mathrm{Pic}(X'')$, de unde rezultă existenţa omomorfismului canonic de grupuri :

$$a : \varinjlim_i \mathrm{Pic}(T_i) \to \mathrm{Pic}(X'').$$

Teorema 8.5.2 şi propoziţia 8.5.5. din EGA IV arată că omomorfismul a este un izomorfism.

Pentru un indice i arbitrar vom nota pentru simplitate $V' = V_i$, $U' = U_i$, $f' = f_i$ şi $T = T_i$. Cu aceste notaţii are loc :

(13.23) LEMĂ. *Există un izomorfism de grupuri*

$$b : \mathrm{Pic}(T) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Pic}(X)$$

definit în felul următor : fie L un O_T-modul inversibil şi fie L_1 un $O_{U'}$-modul inversibil astfel încît $L_1/T \cong L$. Atunci $b([L]) = [L_1/X]$, unde prin $[M]$ am notat clasa în grupul lui Picard respectiv a modulului inversibil M.

Demonstraţie. Definiţia lui b nu depinde de alegerea prelungirii L_1 a lui L. Într-adevăr, dacă L_2 este un alt $O_{U'}$-modul inversibil astfel încît $L_2/T \cong L$, atunci $L_1 \otimes L_2^{-1} \cong O_T$. Cum V' este spectrul unui inel de valuare discretă, T este complementara divizorului efectiv X al cărui fibrat normal în U' este trivial. Într-adevăr, dacă t este uniformizant local pentru inelul B_i, atunci X are drept ecuaţie globală pe U' pe $t = 0$.

Deoarece $L_1 \otimes L_2^{-1}$ este trivial în complementara lui X şi deoarece X este ireductibilă, există un întreg m astfel încît $L_1 \otimes L_2^{-1} \cong O_{U'}(mX)$, de unde $L_1 \otimes L_2^{-1}/X \cong O_{U'}(mX)/X \cong O_X$. Deci dacă definiţia lui b este posibilă, atunci ea nu depinde de alegerea prelungirii lui L.

Pe de altă parte, este totdeauna posibil să găsim o prelungire L_1 a lui L deoarece schema U' este nesingulară (morfismul f' este neted şi V' este nesingulară). Deci b este corect definit şi în plus este clar că b este omomorfism de grupuri.

Rămîne de arătat că b este izomorfism. Fie $\omega_{U'/V'} = \overset{2}{\wedge} (\Omega^1_{U'/V'})$. Cum $\Omega^1_{U'/V'}$ este local liber de rang 2, $\omega_{U'/V'}$ este un $O_{U'}$-modul inversibil. Mai mult, $(\omega_{U'/V'})/X \cong \omega_X$ şi $(\omega_{U'/V'})/T \cong \omega_T$. Altfel spus, $b([\omega_T]) = [\omega_X]$. Ţinînd cont de condiţia a) a lemei (13.16), ω_X generează $\mathrm{Pic}(X)$, şi deci surjectivitatea lui b este dovedită.

Fie acum $b([L]) = 0$. Dacă L_1 este o prelungire a lui L la U', atunci are loc şirul exact (ţinînd cont că $L_1/X \cong O_X$)

$$0 \to L_1 \xrightarrow{p} L_1 \to O_X \to 0,$$

care induce şirul exact de coomologie :

$$H^0(L_1) \to H^0(O_X) \to H^1(L_1) \xrightarrow{p} H^1(L_1) \to H^1(O_X) = 0.$$

Cum $H^1(L_1)$ este un B_i-modul de tip finit (f' este propriu), şirul exact de mai sus arată în particular că $H^1(L_1) = p \cdot H^1(L_1)$, şi deci după lema lui Nakayama, $H^1(L_1) = 0$. Acelaşi şir exact arată atunci că există o secţiune $s \in H^0(L_1)$ a cărei restricţie la $H^0(O_X)$ să fie secţiunea 1. Ţinînd cont că f' este morfism propriu şi că mulţimea $\{z \in U' \mid s(z) \neq 0\}$ este deschisă în U', rezultă imediat că $s(z) \neq 0$ pentru orice $z \in U'$; altfel spus $L_1 \cong O_{U'}$, şi deci $L \cong O_T$. Q.E.D.

Revenim acum pentru a încheia demonstraţia lemei fundamentale (13.17). Observăm că izomorfismele $b_i : \mathrm{Pic}(T_i) \to \mathrm{Pic}(X)$ date de lema (13.23) sînt compatibile cu omomorfismele sistemului inductiv al grupurilor $\mathrm{Pic}(T_i)$, deducem existenţa unui izomorfism canonic între $\mathrm{Pic}(X)$ şi $\varinjlim_i \mathrm{Pic}(T_i)$, şi cum am văzut că acest ultim grup se identifică via izomorfismul a cu $\mathrm{Pic}(X'')$, a unui izomorfism canonic între $\mathrm{Pic}(X)$ şi $\mathrm{Pic}(X'')$. Din construcţia acestui izomorfism rezultă că ω_X este aplicat pe $\omega_{X''}$, şi cum $\mathrm{Pic}(X) = \mathbb{Z}\,\omega_X$, deducem $\mathrm{Pic}(X'') = \mathbb{Z}\,\omega_{X''}$. Folosind EGA III 4.7.1 şi faptul că $\omega_{U/V}^{-1}/X \cong \cong \omega_X^{-1}$ este amplu pe X rezultă că $\omega_{U/V}^{-1}$ este amplu pe U, şi deci $\omega_{X'}^{-1} \cong \omega_{U/V}^{-1}/X'$ este amplu pe X'. Cum amplitudinea se păstrează la schimbarea bazei, am demonstrat că $\omega_{X''}^{-1}$ este amplu pe X'' altfel spus, X'' satisface condiţia a) din lema (13.16).

Ţinînd cont de (13.22.1) avem $H^1(X'', O_{X''}) = H^1(X', O_{X'}) \otimes_{k'} k'' = 0$.

Arătăm acum că X'' satisface şi condiţia c) din lema (13.16). În acest scop observăm că, deoarece $\omega_{X''}$ este imaginea inversă a lui $\omega_{X'}$ via morfismul canonic $X'' \to X'$, $(\omega_{X''} \cdot \omega_{X''}) = (\omega_{X'} \cdot \omega_{X'})$. Pe de altă parte, pentru orice întreg m O_U-modulul $\omega_{U/V}^m$ este f-plat, $\omega_{U/V}^m/X' \cong \omega_{X'}^m$, şi $\omega_{U/V}^m/X \cong \omega_X^m$. Aplicînd teoremele de schimbare a bazei (cf. Mumford [2], II, § 5) obţinem:

$$\chi(X', \omega_{X'}^m) = \chi(X, \omega_X^m) \text{ pentru orice } m.$$

Ţinînd cont de definiţia indicelui de intersecţie, am demonstrat formula $(\omega_{X'} \cdot \omega_{X'}) = (\omega_X \cdot \omega_X)$, sau încă, ţinînd cont şi de formula de mai sus, $(\omega_{X''} \cdot \omega_{X''}) = (\omega_X \cdot \omega_X) \leqslant 5$ (X verifică condiţia c) din (13.16)). Folosind formula lui Noether obţinem şi inegalitatea $b_2(X'') \geqslant 5$.

Rezumînd toată discuţia de mai sus, am construit suprafaţa X'' peste corpul algebric închis de caracteristică zero k'' cu $q(X'') = = 0$ şi cu proprietăţile a) şi c) din lema (13.16). Or, acest fapt intră în contradicţie cu lema (13.18). În acest mod lema fundamentală (13.17), şi prin aceasta teorema (13.3), este complet demonstrată în orice caracteristică.

(13.24) *Observație.* Condiția „$p_2 = q = 0$” din criteriul lui Castelnuovo de raționalitate implică imediat condiția „$p_g = q = 0$”. Ne putem întreba dacă nu cumva suprafețele raționale pot fi caracterizate de această ultimă condiție. Răspunsul este negativ, deoarece suprafețele Enriques (cf. (10.10)) și suprafețele Godeaux (cf. (9.6.2) satisfac condiția „$p_g = q = 0$” fără a fi însă raționale.

(13.25) *Exemplu.* Cu criteriul de raționalitate al lui Castelnuovo se poate deduce imediat faptul că orice suprafață nesingulară de grad 3 din P^3 este rațională. Într-adevăr, dacă X este o asemenea suprafață, avem $H^1(O_X) = 0$ și $\omega_X = O_X(-1)$, deoarece X este intersecție completă. Rezultă deci $p_2 = q = 0$ și teorema (13.3) implică raționalitatea lui X. Se poate însă demonstra și direct pe cale elementară raționalitatea lui X folosindu-se faptul că X conține o dreaptă din P^3 (care are în mod necesar autointersecția -1 pe X, și deci X nu este model minimal).

(13.26) Definiție. Fie X o varietate algebrică proiectivă și nesingulară de dimensiune $n \geqslant 1$. Se spune că X este o varietate *unirațională* dacă există o aplicație rațională $\varphi: P^n \to X$ dominantă și separabilă.

Este clar că orice varietate rațională (adică birațional izomorfă cu P^n) este rațională. Pe de altă parte, dacă X este o curbă unirațională, atunci formula lui Hurwitz (cf. Hartshorne [1], pag. 301) arată imediat că $X \cong P^1$. În ceea ce privește suprafețele, criteriul lui Castelnuovo implică:

(13.27) Teoremă. *Orice suprafață unirațională este rațională.*

Demonstrație. Fie $\varphi: P^2 \to X$ o aplicație rațională dominantă și separabilă. Compunînd pe φ cu un produs finit convenabil de transformări pătratice, rezultă un morfism surjectiv și separabil $\psi: Y \to X$, cu Y suprafață rațională. Atunci pentru fiecare $n \geqslant 1$ morfismul separabil ψ induce aplicația injectivă $\psi^*: \Gamma(X, \omega_X^n) \to \Gamma(Y, \omega_Y^n)$ (separabilitatea lui ψ intervine de o manieră esențială), și cum $p_n(Y) = 0$, avem $p_n(X) = 0$ pentru orice $n \geqslant 1$. Pe de altă parte, dacă $\alpha_X: X \to \mathrm{Alb}(X)$ este morfismul Albanese, avem, după (5.3), $q(X) = \dim \mathrm{Alb}(X)$. Însă $\mathrm{Alb}(X)$ este o varietate abeliană generată de $\alpha_X(X) = (\alpha_X \circ \psi)(Y) = (\mathrm{Alb}(\psi) \circ \alpha_Y)(Y) = 0$. Cum $p_g(X) = 0$ deducem $q(X) = 0$ ținînd cont de (5.3). În fine $p_2(X) = q(X) = 0$ implică X rațională după teorema (13.3). Q.E.D.

(13.28) *Observații.* i) Dacă se slăbește noțiunea de uniraționalitate renunțîndu-se la condiția de separabilitate a lui φ, atunci enunțul teoremei (13.27) nu mai rămîne în general adevărat. Într-adevăr, Zariski a construit exemple de suprafețe uniraționale în sensul mai slab precizat, care nu sînt raționale (cf. Zariski [3]).

ii) Prima demonstrație în caracteristică arbitrară a criteriului de raționalitate al lui Castelnuovo a fost dată de Zariski (cf. Zariski [2], [3]). Ulterior, M. Artin (cf. Bombieri-Husemoller [1]) și H. Kurke [1]) au dat demonstrații mai scurte, complet diferite de demonstrația lui Zariski, utilizînd coomologie etală în loc de coomologia clasică cu coeficienți întregi, și șirul lui Kummer în loc de șirul exponențial din demonstrația lemei (13.18)1

iii) Recent s-a demonstrat că există varietăți uniraționale de dimensiune 3 (anume anumite hipersuprafețe de grad 3 sau 4 în P^4) care nu sînt raționale (cf. Clemens-Griffiths [1] sau Iskovskih-Manin [1]).

(13.29) *Referințe bibliografice.* Demonstrația teoremei (13.2) este prezentată după Mumford [4], iar demonstrația criteriului lui Castelnuovo aparține lui Kodaira (cf. Safarevici și al. [1], sau Bombieri-Husemoller [1], sau Beauville [1]). Demonstrația criteriului lui Castelnuovo în caracteristică pozitivă prezentată aici aparține lui Iskovskih (cf. Iskovskih [1]).

BIBLIOGRAFIE

S. ABHYANKAR, 1. *On the field of definition of a non-singular transform of an algebraic surface*, Ann. Math., **65**, (1957), 268—281.

A. ALTMAN, S. KLEIMAN, 1. *Introduction to Grothendieck duality theory*, Springer, Lect. Notes Math. No. 146 (1970).

M. ARTIN, 1. *Some numerical criteria for contractibility of curves on an algebraic surface*, Amer. J. Math., **84** (1962), 485—496.

2. *On isolated rational singularities of surfaces*, Amer. J. Math., **88** (1966), 129—136.

3. *Algebraization of formal moduli : II. Existence of modifications*, Ann. Math., **91** (1970), 88—136.

M.F. ATIYAH *Vector bundles over an elliptic curve*, Proc. London Math. Soc., **27** (1957), 414—452.

L. BĂDESCU, 1. *Applications of the Grothendieck duality theory to the study of normal isolated singularities*, Revue Roum. Math. Pur. Appl., **24** (5) (1979), 673—689.

A. BEAUVILLE, 1. *Surfaces algébriques complexes*, Astérisque, **54** (1978), Soc. Math. France.

E. BOMBIERI, 1. *Pluricanonical models of surfaces of general type*, Publ. Math. IHES, **42** (1972), 171—220.

E. BOMBIERI, D. HUSEMOLLER, 1. *Classification and embeddings of surfaces*, Proc. Symp. Pure Math., **29** (1975), 329—420.

E. BOMBIERI, D. MUMFORD, 1. *Enriques' classification of surfaces in char. p: II*, în volumul *Complex analysis and algebraic geometry* (dedicated to K. Kodaira), Iwanami Shoten Publ., Tokyo, Cambridge Univ. (part. I), 1977.

2. *Enriques' classification of surfaces in char. p : III*, Inv. Math., **35** (1976), 197—232.

A. BOREL, 1. *Linear algebraic groups*, Benjamin, New York — Amsterdam, 1969.

A. BOREL, J-P. SERRE, 1. *Le théorème de Riemann-Roch*, Bull. Soc. Math. France, **86** (1958), 97—136.

I. BUCUR, 1. *Seminar de geometrie algebrică*, Roma, 1970 (nepublicat).

2. *Capitole speciale de algebră*, Editura Academiei, București, 1980.

C.H. CLEMENS, P. GRIFFITHS, 1. *The intermediate Jacobian of the cubic threefold*, Ann. Math., **95** (1972), 281—356.

P. DELIGNE și al., 1. *Cohomologie étale* (SGA 4 1/2), Springer Lect. Notes Math. 569 (1977).

A. GROTHENDIECK, 1. *Sur une note de Mattuck-Tate*, J. Reine Angew. Math. (Crelle), **200** (1958), 208—215.
2. *La théorie des classes de Chern*, Bull. Soc. Math. France, **86** (1958), 137—154.
3. *Fondements de la géométrie algébrique* (Extraits du Sémin. Bourbaki 1957—1962), Secret. Paris, 1962.
4. *Local cohomology*, Springer, Lect. Notes Math., **41** (1967).
5. *La classification des fibrés holomorphes sur la sphère de Riemann*, Amer. J. Math., **79** (1957), 121—138.
6. *Séminaire de géometrie algébrique* (SGA II) IHES Paris 1962.
7. *Revetements étales et groupe fondamental* (SGA I), Springer, Lect. Notes Math., 224 (1971).

A. GROTHENDIECK și al., 1. *Théorie des intersections et théorème de Riemann-Roch* (SGA 6), Springer Lect. Notes Math., 225 (1971).

A. GROTHENDIECK, J. DIEUDONNÉ, 1. *Eléments de géométrie algébrique* I — IV (citat EGA), Publ. Math. IHES (1960 , . . .).

R. HARTSHORNE, 1. *Algebraic geometry*, Springer Verlag, 1977.
2. *Residues and duality*, Springer, Lect. Notes Math., 20 (1966).
3. *Ample subvarieties of algebraic varieties*, Springer Lect. Notes Math. 156 (1970).
4. *Curves with high self-intersection on an algebraic surface*, Publ. Math. IHES, **36** (1969), 111—126.

H. HIRONAKA, 1. *Resolution of singularities of an algebraic variety over a field of char zero*, Ann. Math., **79** (1964), 109—326.

J. IGUSA, 1. *Betti and Picard numbers of an abstract algebraic surface*, Proc. Nat. Acad. Sci. USA, **46** (1960), 724—726.

V. A. ISKOVSKIH, 1. *Minimal models of rational surfaces over arbitrary fields*, Izvestia Akad. Nauk. SSSR, **43** (*1*) (1979), 19—43 (l. rusă).

V. A. ISKOVSKIH, YU. MANIN, 1. *Three-dimensional quartics and counter-examples to the Lüroth problem*, Mat. Sbornik, **86** (*1*) (1971), 140—166 (l. rusă).

S. KLEIMAN, 1. *Toward a numerical theory of ampleness*, Ann. Math., **84** (1966), 293—344.

F. W. KNÖLLER, 1. *2-dimensionale Singularitäten und Differentialformen*, Math. Ann. **206** (1973), 205—213.

K. KODAIRA, 1. *On compact analytic surfaces* I, II, III, Annals Math., **71**, **77**, **78** (1960, 1963), 111—152, 563—626 și 1—40.
2. *On the structure of compact complex analytic surfaces*, I, II, III, IV, Amer. J. Math., **86**, **88** (1964, 1966), 751—798, 682—721, 55—83, și 1048—1066.

H. KURKE, 1. *On Castelnuovo's criterion for rational surfaces*, Proc. Inter. Symp. Algebraic Geometry, Kyoto 1977, 557—563, Kinokuniya Book-Store.

H. LAUFER, 1. *On rational singularities*, Amer. J. Math., **94** (1972), 597—608.

J. LIPMAN, 1. *Rational singularities with applications to algebraic surfaces and unique factorization*, Publ. Math. IHES, **36** (1969), 195—297.

D. Mumford, 1. *Lectures on curves on an algebraic surface*, Annals Math. Studies, **59** (1966), Princeton.

2. *Abelian varieties*, Oxford Univ. Press, Oxford, 1970.

3. *The canonical ring of an algebraic surface*, Ann. Math., **76** (1962), 612–615.

4. *Enriques' classification of surfaces in char. p : I*, *Global Analysis* (dedicated to K. Kodaira), 325–339, Princeton Univ. Press, 1969.

M. Nagata, 1. *On rational surfaces* I, Mem Coll. Sci Kyoto Univ. Ser. A, **32** (1960), 635–639.

A. Ogus, 1. *Zariski's theorem on several linear systems*, Proc. Amer. Math. Soc., **37** (1973), 59–62.

F. Oort, 1. *A construction of generalized Jacobian varieties by group extensions*, Math. Ann., **147** (1962), 277–286.

C. P. Ramanujam, 1. *Remarks on the Kodaira vanishing theorem*, Journ. Indian Math. Soc., **36** (1972), 41–51.

M. Raynaud, *Spécialisation du foncteur de Picard*, Publ. Math. IHES, **38**, 27–50.

J. P. Serre, 1. *Faisceaux algébriques cohérents*, Ann. Math., **61** (1955), 197–278 (citat FAC).

2. *Géométrie algébrique et géométrie analytique*, Ann. Inst. Fourier, **6** (1956), 1–42.

3. *Groupes algébriques et corps de classes*, Hermann, Paris 1959.

4. *Morphismes universels et variétés d'Albanese*, Séminaire Chevalley ENS 1958/59, Exposé 10.

I. R. Safarevici, 1. *Bazele Geometriei Algebrice*, Edit. Ştiinţ. Enciclopedică, Bucureşti, 1976.

2. *Lectures on minimal models and birational transformations of two-dimensional schemes*, Tata Inst., Bombay, 1966.

I. R. Safarevici şi al., 1. *Algebraic surfaces*, AMS, providence, Rhode Island, 1967.

J. Tate, 1. *Algebraic formulas in arbitrary char.* (appendix 1 în volumul lui S. Lang, *Elliptic functions*, Addison Wesley Publ. Comp. 1973).

O. Zariski, 1. *The theorem of Riemann-Roch for high multiples of a divisor on an algebraic surface*, Ann. Math., **76** (1962), 560–612.

2. *The problem of minimal models in the theory of algebraic surfaces*, Amer. J. Math., **80** (1958), 146–184.

3. *On Castelnuovo's criterion of rationality $p_a = p_2 = 0$ of an algebraic surface*, Illinois J. Math., **2** (1958), 303–315.

4. *The reduction of singularities of an algebraic surface*, Ann. Math., **40** (1939), 639–689.

5. *A simplified proof for the reduction of singularities of an algebraic surface*, Ann. Math., **43** (1942), 583–593.

INDEX

LUCIAN BĂDESCU, Suprafețe algebrice (Algebraic surfaces), Editura Academiei R.S.R., București, 1981

(ABSTRACT)

The aim of this book is to present some basic facts from the theory of algebraic surfaces, e.g. rational singularities of surfaces and their relation with Grothendieck duality theory, numerical criteria for contractibility of curves on an algebraic surface (due to M. Artin), the problem of minimal models of (projective and non singular) surfaces and Enriques'classification of surfaces over an algebraically closed field of arbitrary characteristic. In fact the classification of surfaces is the main scope of this book and we intend to present the approach developed by Mumford (see Mumford [3] and [4]) and Bombieri and Mumford (see Bombieri-Mumford [1] and [2]).

Chapter one presents Kleiman's approach of defining the (cohomological) intersection theory of divisors and line bundles on a complete algebraic scheme over k and the proof of Nakai-Moishezon criterion for ampleness. As an application a theorem of Zariski is proved which asserts that every complete non singular surface is projective.

Chapter two proves the Hodge index theorem and some results concerning the semi-negativeness or negativeness of the intersection matrix of a fibre of a morphism $f: X \to Y$ in which either X is a non singular surface, Y a curve and $f_*O_X = O_Y$, or X is a non singular surface, Y a normal surface and f birational.

The third chapter presents two important criteria for contractibility due to M. Artin (theorems (3.9) and (3.15)) which will be useful later, and the theory of rational singularities of surfaces developed by the same author.

Chapter four gives further properties of rational singularities. More precisely, it studies two-dimensional singularities with the help of Grothendieck duality theory and a vanishing theorem of Laufer and Ramanujam (see theorems (4.1) and (4.9)). As an application the author characterizes completely the normal two-dimensional singularities which are Gorenstein (theorem (4.17)) and gives various characterizations of rational double points.

Chapter five reviews some fundamental facts which are needed in the classification of surfaces, such as : Noether's formula in char. p., the Picard scheme, the Albanese variety and the canonical ring of a surface, etc.

Chapter six proves the theorem that every projective non singular surface dominates a minimal model.

Chapter seven begins with some results about the generic irreducibility and generic smoothness of fibres of a morphism from a surface to a curve (see (7.1), (7.3) and (7.4)). The indecomposable curves of canonical type on a minimal surface are then studied. These are closely related with the notion of elliptic or quasi-elliptic fibering, which plays a central role in the classification theory. One proves some results (see (7.11), (7.12) and (7.13)) which ensure the existence of such fiberings on a given minimal surface and the important theorem (7.15) which computes the canonical class of an elliptic or quasi-elliptic fibering.

Chapter eight divides minimal surfaces into four classes after their canonical dimension and proves that on a minimal surface X of canonical dimension 0 or 1 one has $p_4 \neq 0$ or $p_6 \neq 0$.

Chapter nine continues the classification after the canonical dimension, giving first information about surfaces of general type. Next a result of Zariski-Mumford is proved saying that the canonical ring of a projective non singular surface is a k-algebra of finite type.

Chapter ten deals with the minimal surfaces of canonical dimension zero. These surfaces can be divided into four classes : K3, abelian, hyperelliptic and Enriques (provided that char(k) $\neq$ 2,3). Every such class is studied separately.

Chapter eleven deals with ruled surfaces. The Noether-Tsen criterion for ruledness is proved which allows in particular to relate geometrically ruled surfaces with vector bundles over a projective non singular curve. Finally it is proved that every vector bundle of rank 2 over $\mathbf{P}^1$ is a direct sum of line bundles (this is a special case of a theorem of Grothendieck).

Chapter twelve classifies completely the minimal models of ruled non rational surfaces (theorem (12.2)) and of rational surfaces (theorem of Nagata (12.8)). The methods employed here are elementary (do not depend upon the classification) and are due to Hartshorne.

The last chapter is devoted to the proof of Castelnuovo's criterion of rationality and to the proof of Enriques' theorem characterising ruled surfaces by the condition $p_{12} = 0$.

CONTENTS

Redactor: PETRE MOCANU
Tehnoredactor: MELUŞ TUREAC

Bun de tipar 14.02.1981.
Format 16/61×86. *Coli de tipar* 13,75.
C.Z. pentru biblioteci mari și mici: 513.62.



C. 766 — I. P. INFORMAŢIA
str. Brezoianu nr. 23—25,
Bucureşti

60

Cartea de față reprezintă o introducere în teoria lui Enriques a clasificării suprafețelor algebrice proiective și netede.

Această importantă teorie este unanim recunoscută ca fiind dificilă, și ca urmare scopul principal al cărții este de a o face accesibilă tinerilor cercetători sau studenților din ultimii ani ai facultăților de matematică care doresc să se specializeze în geometria algebrică sau în disciplinele conexe.

Acceptîndu-se anumite fapte care sînt prezentate în capitolul V, cu referințele bibliografice de rigoare, demonstrațiile tuturor celorlalte rezultate sînt complete.

Cartea poate fi folosită și de o categorie mai largă de matematicieni ca sursă de informare.

Lei 11